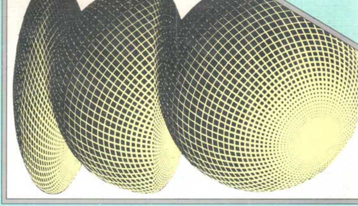


Problemas resueltos de

MATEMÁTICAS I COU

Tomo 2

Cálculos diferencial e integral.
Cálculo de probabilidades.

EDELVIVES

Autores:
Benigno Gil Marañón
Ángel de la Llave Canosa

Pruebas de acceso

Problemas resueltos de

MATEMÁTICAS I

COU. Opciones A y B

TOMO 2

Cálculos diferencial e integral
Cálculo de probabilidades

EDELVIVES

Coordinación editorial: **Abel Pedrosa**
Grabado de cubierta: **Escher**
Dibujos: **Miguel Ángel del Castillo Jiménez**

ISBN: **84-263-1913-0 (obra completa)**
ISBN: **84-263-1919-X (tomo II)**
Depósito legal: **Z. 2633-90**
Impreso en España / **Printed in Spain**
Talleres gráficos: **Edelvives**
50012 Zaragoza

PRESENTACIÓN

El objetivo primordial de **Problemas resueltos de Matemáticas I** coincide con las reflexiones básicas que se plasman en la modificación del Curso de Orientación Universitaria: *conseguir que el COU tenga realmente un carácter orientador, así como sentar las bases de una preparación adecuada del futuro estudiante universitario.*

Según las disposiciones generales (Orden ministerial del 3 de septiembre de 1987 y Resolución del 20 de enero de 1988), se han dispuesto *cuatro opciones:* A (Científico-tecnológica), B (Biosanitaria), C (Ciencias Sociales) y D (Humanístico-lingüística). Claramente se establece que existirá *un sistema de prioridades para el ingreso de los alumnos en los diferentes centros universitarios,* según la opción que hubieran elegido previamente en el COU.

El libro que se presenta pretende cubrir la formación matemática, fundamentalmente práctica, de los alumnos que prefieran las opciones A y B y ayudarlos en la preparación de las **Pruebas de Acceso** a la Universidad.

Es una amplia y variada colección de problemas que recoge los **ejercicios resueltos** y ofrece la solución de los **ejercicios propuestos** en el libro **Matemáticas I** de COU, editado también por Edelvives.

Debido al gran número de ejercicios que presenta dicha colección, se edita en dos volúmenes separados. El primero recoge los ejercicios correspondientes a los bloques temáticos I (**matrices y sistemas**) y II (**espacios afín y euclídeo**). El segundo contiene los que corresponden a los bloques temáticos III (**cálculos diferencial e integral**) y IV (**cálculo de probabilidades**).

Es una obra pensada para ayudar a los alumnos en la comprensión de los contenidos básicos estudiados en la teoría, orientar su propio aprendizaje, capacitarlos para la aplicación práctica de los conceptos teóricos y proporcionarles las herramientas matemáticas indispensables en su futuro trabajo profesional.

Esta publicación puede ser también un valioso colaborador para los profesores, al evitarles la resolución numérica de los problemas propuestos y al complementar sus explicaciones de una manera apropiada y en el momento oportuno.

Los ejercicios se enumeran en orden creciente de dificultad y están resueltos detalladamente (en ocasiones hasta con una minuciosidad que podría parecer excesiva), utilizando un lenguaje claro y comprensible, pero no por eso desprovisto del rigor matemático adecuado. Con ello se pretende que los alumnos consigan una perfecta asimilación de los conceptos teóricos empleados y de las técnicas aplicadas en la resolución de los problemas.

Esperamos lograr nuestro objetivo de ayudar e interesar a los alumnos de COU en el estudio de las matemáticas, disciplina de una importancia capital. Con tan poco nos damos por satisfechos.

LOS AUTORES

PROGRAMACIÓN E ÍNDICE

III. —————— Cálculos diferencial e integral

IV. —————— Cálculo de probabilidades

TEMA III-1.1. ———— Diferencial de una función

Ejercicios resueltos

1. *Obtener los puntos en los que la función* $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ *admite una tangente paralela a la recta* $y = 12x + 5$.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

Como la derivada es la pendiente de la tangente geométrica, en los puntos buscados se debe cumplir que $y' = 12$.

$$y' = 3x^2 + 18x - 9 = 12 \rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -7.$$

$$f(1) = 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 15 = 16; \quad f(-7) = (-7)^3 + 9 \cdot (-7)^2 - 9 \cdot (-7) + 15 = 176.$$

Los puntos pedidos son: $P_1(1, 16)$ y $P_2(-7, 176)$.

2. *Estudiar la continuidad y derivabilidad de* $f(x) = |x - 1|$ *en el intervalo* $[-2, 2]$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

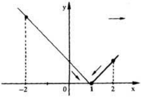
Como $\begin{cases} |x - 1| = -(x - 1) = 1 - x, \text{ si } x < 1 \\ |x - 1| = x - 1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ si } x < 1 \\ x - 1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

El valor de la función en el punto de abscisa $x = 1$ es $f(1) = 0$ (figura adjunta). Los límites a la derecha y a la izquierda son:

$$\lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0; \quad \lim_{x \to 1^-} (1 - x) = 0.$$

$0 = 0 = 0$, ambos límites son iguales, e iguales al valor de la función en el punto.

$f(x)$ es continua en $[-2, 2]$.



Sin embargo, sus derivadas por la derecha y por la izquierda:

$$f'(1^+) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(1 + \Delta x) - 1] - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'(1^-) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1 - (1 + \Delta x)] - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

$1 \neq -1$, los cocientes incrementales tienen distinto límite por la derecha y por la izquierda. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

3. *Obtener la derivada n-ésima del producto de dos funciones derivables, al menos, n veces.*

Sean dichas funciones $u(x)$ y $v(x)$; $y = u \cdot v$.

Derivando sucesivamente:

$$y' = u'v + uv'; \qquad y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$y^{(3} = u^{(3}v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv^{(3} = u^{(3}v + 3u''v' + 3u'v'' + uv^{(3}.$$

De la observación de los resultados anteriores, y recordando el desarrollo del binomio de Newton, se llega a:

$$y^{(n} = u^{(n}v + \binom{n}{1}u^{(n-1}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2}v'' + \dots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1} + \binom{n}{n}u \cdot v^{(n}, \quad (n \in N^*).$$

4. *Hallar la derivada n-ésima de* $y = \dfrac{a}{x-b}$.

Haciendo uso del exponente negativo, $y = a \cdot (x-b)^{-1}$, y derivando sucesivamente:

$y' = (-1) \cdot a(x-b)^{-2};$

$y'' = (-1) \cdot (-2) \cdot a(x-b)^{-3} = +1 \cdot 2 \cdot a(x-b)^{-3};$

$y^{(3} = 1 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot a(x-b)^{-4} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a(x-b)^{-4};$

$y^{(4} = +1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a(x-b)^{-5};$

...

El signo es alternativamente $-$ y $+$; se expresa, en general, $(-1)^n$.

El coeficiente es sucesivamente $1 = 1!$, $1 \cdot 2 = 2!$, $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$, ...; en general, $n!$

El exponente del binomio es $-2, -3, -4, \dots$; en general, $-(n+1)$.

$$y^{(n} = (-1)^n \cdot n! \cdot a \cdot (x-b)^{-(n+1)}.$$

5. *Calcular* y' *e* y'' *en la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Se puede despejar y, derivando a continuación por los métodos usuales, pero suele ser preferible operar como se indica a continuación. Derivando respecto a x en los dos miembros de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} - 0 = 0; \text{ ya que } D(y^2) = 2yy'.$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0 \quad \text{(I)} \quad \rightarrow \quad \frac{yy'}{b^2} = -\frac{x}{a^2} \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}. \quad \text{(II)}$$

Derivando de nuevo en (I) respecto a x:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{yy'' + (y')^2}{b^2} = 0 \quad \text{por (II)} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{yy'' + \dfrac{b^4x^2}{a^4y^2}}{b^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{yy''}{b^2} = -\frac{1}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^4y^2} = -\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^4y^2} \rightarrow y'' = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}. \quad \text{(III)}$$

De la ecuación de la elipse se deduce que $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; sustituyendo en (III):

$$y'' = -\frac{b^2(a^2b^2)}{a^4y^3} \rightarrow y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Derivar y simplificar las funciones:

a) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

b) $y = \ln\dfrac{2+3x}{2-3x}$.

c) $y = \ln(bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2})$.

d) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1 + x}{1 - x} - \operatorname{arc\,tg} x$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

e) $y = \left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{1}{4}\right) \operatorname{arc\,sen} x + \dfrac{x}{4}\sqrt{1 - x^2}$.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

f) $f(x) = \sqrt{\ln \operatorname{tg}(x^2 + 1)}$ en $x = x_0$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Se aplica en cada uno de los casos la(s) adecuada(s) regla(s) de derivación.

a) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}} \cdot \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)' = \frac{\sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 + x}} \cdot \frac{1(1 - x) - (-1)(1 + x)}{(1 - x)^2};$$

$$y' = \frac{\sqrt{1 - x}}{2\sqrt{1 + x}} \cdot \frac{2}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}.$$

Si se aplica la derivación logarítmica, se simplifican los cálculos:

$$\ln y = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 - x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)}{1 - x} = \frac{1 - x + 1 + x}{2(1 + x)(1 - x)} = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)};$$

$$y' = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)} \cdot y = \frac{1}{(1 + x)(1 - x)} \cdot \frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}};$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x}\,(1 - x)\sqrt{1 - x}} = \frac{1}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) $$y' = \frac{1}{\dfrac{2 + 3x}{2 - 3x}} \cdot \left(\frac{2 + 3x}{2 - 3x}\right)' = \frac{2 - 3x}{2 + 3x} \cdot \frac{3(2 - 3x) - (-3)(2 + 3x)}{(2 - 3x)^2};$$

$$y' = \frac{6 - 9x + 6 + 9x}{(2 + 3x)(2 - 3x)} = \frac{12}{4 - 9x^2}.$$

Si se toman logaritmos neperianos en la función, se simplifican los cálculos:

$$y = \ln(2 + 3x) - \ln(2 - 3x);$$

$$y' = \frac{3}{2 + 3x} - \frac{(-3)}{2 - 3x} = \frac{3(2 - 3x) + 3(2 + 3x)}{(2 + 3x)(2 - 3x)} = \frac{6 - 9x + 6 + 9x}{4 - 9x^2} = \frac{12}{4 - 9x^2}.$$

c) $$y' = \frac{(bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2})'}{bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}} \cdot \left(b + \frac{2b^2x}{2\sqrt{b^2x^2 - a^2}}\right);$$

$$y' = \frac{1}{bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}} \cdot \frac{b\sqrt{b^2x^2 - a^2} + b^2x}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}};$$

$$y' = \frac{1}{bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}} \cdot \frac{b(bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2})}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}.$$

d) $$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' - \frac{1}{1+x^2};$$

$$y' = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \frac{1(1-x) - (-1)(1+x)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2};$$

$$y' = \frac{1 - x + 1 + x}{1 - 2x + x^2 + 1 + 2x + x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2};$$

$$y' = \frac{2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Este resultado indica que la función dada es constante.

e) $$y' = \frac{3x^2}{2} \cdot \text{arc sen } x + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{4} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}};$$

$$y' = \frac{3x^2}{2} \cdot \text{arc sen } x + \frac{x^3}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{1-x^2}};$$

$$y' = \frac{3x^2}{2} \cdot \text{arc sen } x + \frac{2x^3 - 1 + 1 - x^2 - x^2}{4\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x^2}{2} \cdot \text{arc sen } x + \frac{x^3 - x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

f) $$f'(x) = \frac{[\ln \text{tg}(x^2+1]'}{2\sqrt{\ln \text{tg}(x^2+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{\ln \text{tg}(x^2+1)}} \cdot \frac{[\text{tg}(x^2+1)]'}{\text{tg}(x^2+1)};$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln \text{tg}(x^2+1)}} \cdot \frac{[1 + \text{tg}^2(x^2+1)] \cdot 2x}{\text{tg}(x^2+1)}.$$

En $x = x_0$ la derivada es:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{\ln \text{tg}(x_0^2+1)}} \cdot \frac{[1 + \text{tg}^2(x_0^2+1)] \cdot 2x_0}{\text{tg}(x_0^2+1)}.$$

2. Calcular y' en $0 \leq x < \pi$, siendo $y = \text{arc tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)';$$

$$y' = \frac{1}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)';$$

$$y' = \frac{1 + \cos x}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos x}}{2\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{\text{sen } x(1+\cos x) - (-\text{sen } x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2};$$

$$y' = \frac{\sqrt{1+\cos x}}{4\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{\text{sen } x + \text{sen } x \cos x + \text{sen } x - \text{sen } x \cos x}{1 + \cos x};$$

$$y' = \frac{2 \text{ sen } x}{4\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x}} = \frac{\text{sen } x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}}.$$

Como $0 \leq x < \pi$, $\sqrt{1-\cos^2 x} = +\text{sen } x$; por tanto:

$$y' = \frac{\text{sen } x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\text{sen } x}{2 \text{ sen } x} = \frac{1}{2}.$$

3. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = e^x$, en el punto de abscisa $x = 2 \ln 2$.

Para hallar la ecuación de la tangente se calcula el punto de tangencia y la pendiente de dicha tangente.

- El punto de tangencia es $[2 \ln 2, y(2 \ln 2)]$.

  Como $y(2 \ln 2) = e^{2 \ln 2} = e^{\ln 2^2} = e^{\ln 4} = 4$, el punto de tangencia es $(2 \ln 2, 4)$.

- La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 2 \ln 2$ es la derivada de la función $y = e^x$ en dicho punto.

  Como $y' = e^x$, la pendiente de la recta tangente es $m = y'(2 \ln 2) = e^{2 \ln 2} = 4$.

La ecuación de la tangente es $y - 4 = 4(x - 2 \ln 2) \rightarrow 4x - y + 4(1 - 2 \ln 2) = 0$.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y que es paralela a la tangente a la curva $y = a + bx + cx^2$ en el punto (x_2, y_2).

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Como la recta pedida es paralela a la tangente a la curva, tiene la misma pendiente que dicha tangente. Por tanto, la pendiente es la derivada de la función $y = a + bx + cx^2$ en el punto (x_2, y_2).

Como $y' = b + 2cx$, la pendiente de la recta es $m = y'(x_2) = b + 2cx_2$.

La ecuación de la recta es $y - y_1 = (b + 2cx_2)(x - x_1) \rightarrow (b + 2cx_2)x - y - (b + 2cx_2)x_1 + y_1 = 0$.

5. Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ es:

a) paralela al eje Ox;

b) paralela a la recta $y = 5x + 3$;

c) perpendicular a la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de tangencia $P(a,b)$ que se busca es la derivada de la función $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ en el punto P.

Como $y' = x^2 - 2x - 3$, la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a,b)$ es $m = y'(a) = a^2 - 2a - 3$.

Para los tres casos propuestos se tiene:

a) Como la recta tangente es paralela al eje Ox, tiene la pendiente $m = 0$; es decir, $m = a^2 - 2a - 3 = 0$.

Resolviendo la ecuación, se obtiene $a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow a_1 = 3, a_2 = -1$.

La ordenada b del punto P es el valor de la función para $x = a$, $b = y(a)$, ya que el punto P pertenece a la curva. Por tanto:

$$b_1 = y(a_1) = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8;$$

$$b_2 = y(a_2) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{8}{3}.$$

Existen dos puntos de tangencia, $P_1(3, -8)$ y $P_2\left(-1, \frac{8}{3}\right)$.

b) Como la recta tangente es paralela a la recta $y = 5x + 3$, tiene la misma pendiente que esta última; es decir, $m = a^2 - 2a - 3 = 5 \rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$.

Resolviendo la ecuación, se obtiene $a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \rightarrow a_1 = 4,\ a_2 = -2$.

La ordenada b del punto P se calcula como en el apartado anterior:

$$b_1 = y(a_1) = \frac{4^3}{3} - 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 = \frac{64}{3} - 16 - 12 + 1;$$

$$b_1 = \frac{64}{3} - 27 = \frac{64}{3} - \frac{81}{3} = -\frac{17}{3};$$

$$b_2 = y(a_2) = \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 - 3(-2) + 1 = -\frac{8}{3} - 4 + 6 + 1 = -\frac{8}{3} + 3 = -\frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{1}{3}.$$

Existen dos puntos de tangencia, $P_1\left(4, -\frac{17}{3}\right)$ y $P_2\left(-2, \frac{1}{3}\right)$.

c) Como la recta tangente es perpendicular a la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$, tiene la pendiente $m = -3$; es decir, $m = a^2 - 2a - 3 = -3 \rightarrow a^2 - 2a = 0$.

Resolviendo la ecuación, se obtiene $a(a - 2) = 0 \rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 2$.

La ordenada b del punto P se halla como en los dos apartados anteriores:

$$b_1 = y(a_1) = \frac{0^3}{3} - 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1;$$

$$b_2 = y(a_2) = \frac{2^3}{3} - 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = \frac{8}{3} - 4 - 6 + 1 = \frac{8}{3} - 9 = \frac{8}{3} - \frac{27}{3} = -\frac{19}{3}.$$

Existen dos puntos de tangencia, $P_1(0, 1)$ y $P_2\left(2, -\frac{19}{3}\right)$.

6. Calcular el ángulo que forman las curvas de ecuaciones $x \cdot y = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$.
(Nota: Es el ángulo formado por las tangentes a las curvas en su punto de intersección.)
(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las curvas, se obtienen los puntos de intersección de ambas:

$$\begin{cases} x \cdot y = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x^2 - \dfrac{1}{x^2} = 1; \quad x^4 - 1 = x^2; \quad x^4 - x^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo la écuación bicuadrada, se obtiene:

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow x_1^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{1+2{,}236}{2} = 1{,}618;$$

$$x_2^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx \frac{1-2{,}236}{2} = -0{,}618.$$

Es decir: $x_1' \approx +\sqrt{1{,}618} \approx 1{,}272 = x_1$; $x_1'' \approx -\sqrt{1{,}618} \approx -1{,}272 = x_2$; las otras dos raíces son imaginarias.

Para $x_1 \approx 1{,}272 \rightarrow y_1 \approx \frac{1}{1{,}272} \approx 0{,}786$; para $x_2 \approx -1{,}272 \rightarrow y_2 \approx -\frac{1}{1{,}272} \approx -0{,}786$.

Las curvas se cortan en dos puntos, A(1,272; 0,786) y B(−1,272; −0,786).

Dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ forman en su punto de intersección (x_1, y_1) un ángulo φ cuya tangente trigonométrica es $\operatorname{tg} \varphi = \frac{g'(x_1) - f'(x_1)}{1 + f'(x_1) \cdot g'(x_1)}$.

Derivando las funciones, se tiene:

$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0 \rightarrow y' = \frac{-y}{x}; \qquad 2x - 2y \cdot y' = 0 \rightarrow y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}.$$

Ángulo φ_A que forman las curvas en el punto A(1,272; 0,786):

Se hallan los respectivos valores de las derivadas para las coordenadas del punto A y se sustituyen en la fórmula que da el valor de tg φ_A:

$$f'(x_1) = \frac{-0{,}786}{1{,}272} \approx -0{,}618; \qquad g'(x_1) = \frac{1{,}272}{0{,}786} \approx 1{,}618.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_A \approx \frac{1{,}618 + 0{,}618}{1 + (-0{,}618) \cdot 1{,}618} \approx \frac{2{,}236}{1-1} = \frac{2{,}236}{0} \rightarrow \infty.$$

Como tg $\varphi_A \rightarrow \infty$, $\varphi_A = 90°$.

Puede deducirse este resultado observando que $f'(x_1)$ y $g'(x_1)$, que son las pendientes de las respectivas rectas tangentes a las curvas en su punto de intersección (x_1, y_1), cumplen la relación $f'(x_1) = -\frac{1}{g'(x_1)}$, que es la condición de perpendicularidad de rectas.

Ángulo φ_B que forman las curvas en el punto B(−1,272; −0,786):

Operando de igual forma que para el punto A, se obtiene:

$$f'(x_1) = \frac{0{,}786}{-1{,}272} \approx -0{,}618; \qquad g'(x_1) = \frac{-1{,}272}{-0{,}786} \approx 1{,}618.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_B \approx \frac{1{,}618 + 0{,}618}{1 + (-0{,}618) \cdot 1{,}618} \approx \frac{2{,}236}{1-1} = \frac{2{,}236}{0} \rightarrow \infty.$$

Como tg $\varphi_B \rightarrow \infty$, $\varphi_B = 90°$.

7. Calcular la diferencial de:

a) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ en $x = \frac{1}{2}$, para $\Delta x = 0{,}3$.

b) $y = \ln (x + \sqrt{1+x^2})$ en $x = \sqrt{3}$, para $\Delta x = 0{,}02$.

a) $dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 0{,}3.$

Se halla la derivada de $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ en $x = \frac{1}{2}$:

$$y' = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2} \rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}.$$

Por tanto, $dy = \frac{8}{3} \cdot 0{,}3 = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8.$

b) $dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(\sqrt{3}) \cdot 0{,}02.$

Se halla la derivada de $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ en $x = \sqrt{3}$:

$$y' = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right);$$

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow$$

$\rightarrow y'(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ (considerando el signo positivo de $\sqrt{4}$).

Por tanto, $dy = \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 = \frac{0{,}02}{2} = 0{,}01.$

8. Calcular en cuánto aumenta el área de un círculo de radio 7 m, si el radio aumenta 1 mm. (**Sugerencia:** Calcular la diferencial del área.)

La variación del área A del círculo, para una variación de la longitud del radio (Δr), es el incremento del área (ΔA), pero en forma aproximada se puede confundir con la diferencial del área (dA).

Sea $A = \pi r^2$ la función que expresa el área del círculo, siendo r su radio.

Diferenciando respecto a r, se tiene $dA = 2\pi r \cdot dr$.

El aumento del área del círculo es $dA = 2\pi \cdot 7\,000 \cdot 1 = 14\,000\pi \approx 43\,982\ mm^2$.

9. Hallar en cuánto aumenta el volumen de una esfera de radio 4 dm, si su radio aumenta 0,01 mm.

Se considera la variación igual a la diferencial del volumen de la esfera.

Sea $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ la función que expresa el volumen de la esfera, siendo r su radio.

Diferenciando respecto a r, se deduce $dV = 4\pi r^2 \cdot dr$.

El aumento del volumen de la esfera es $dV = 4\pi \cdot 400^2 \cdot 0{,}01 = 6\,400\pi \approx 20\,106\ mm^3$.

10. La arista de un cubo mide 25 cm. Por efecto de la dilatación, cada arista aumenta en 0,02 mm. ¿Cuánto aumentará el área del cubo? ¿Cuánto aumentará su volumen?

Se considera la variación igual a la diferencial (del área o del volumen) del cubo.

1) Diferenciando respecto de a la función $A = 6a^2$, que expresa el área del cubo, se tiene $dA = 12a \cdot da$.

El aumento del área del cubo es $dA = 12 \cdot 250 \cdot 0{,}02 = 60 \text{ mm}^2$.

2) Diferenciando respecto de a la función $V = a^3$, que expresa el volumen del cubo, se obtiene: $dV = 3a^2 \cdot da$.

El aumento del volumen del cubo es $dV = 3 \cdot 250^2 \cdot 0{,}02 = 3\,750 \text{ mm}^3$.

11. Calcular $\Delta y - dy$ para la función $y = 2x^2 - \frac{x}{2}$ en $x = 2$, para $\Delta x = 0{,}3$.

(Propuesto en la Univ. de León.)

1) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left[2(x + \Delta x)^2 - \frac{x + \Delta x}{2} \right] - \left(2x^2 - \frac{x}{2} \right);$

$$\Delta y = 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 - \frac{x}{2} - \frac{\Delta x}{2} - 2x^2 + \frac{x}{2} = 4x \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 - \frac{\Delta x}{2}.$$

2) $dy = f'(x) \cdot \Delta x = \left(4x - \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta x = 4x \cdot \Delta x - \frac{\Delta x}{2}.$

Por tanto, $\Delta y - dy = 4x \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 - \frac{\Delta x}{2} - 4x \cdot \Delta x + \frac{\Delta x}{2} = 2\Delta x^2.$

Es decir, $\Delta y - dy$ no depende del valor de x; sólo depende del valor de Δx.

Por tanto, para $\Delta x = 0{,}3$, $\Delta y - dy = 2 \cdot 0{,}3^2 = 2 \cdot 0{,}09 = 0{,}18$.

12. Señalar en qué puntos son discontinuas las siguientes funciones e indicar el tipo de discontinuidad:

a) $y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$.

b) $y = \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}$.

c) $y = \operatorname{tg} x$.

d) $y = \ln(x - 1)$.

e) $y = \ln \frac{x - 1}{x + 1}$.

Una función $y = f(x)$ es **continua** en un punto $x = x_1$, si se cumplen las condiciones siguientes:

1) Existe el valor $f(x_1)$ de la función para $x = x_1$; es decir, la función está definida en $x = x_1$.

2) La función tiene límite cuando x tiende a x_1; es decir, existe el $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$.

3) Coinciden el valor $f(x_1)$ de la función y el del $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$; es decir, $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Es evidente que la tercera condición presupone el cumplimiento de las dos primeras; por tanto, una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = x_1$ si $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo si lo es en cada uno de los puntos del intervalo.

Si una función $y = f(x)$ no es continua en un punto $x = x_1$, se dice que en dicho punto presenta una **discontinuidad.**

Los tipos de discontinuidad que se presentan son:

1) Discontinuidad **evitable:** si la función $y = f(x)$ tiene límite cuando x tiende a x_1, pero el valor $f(x_1)$ de la función en el punto $x = x_1$ o no existe o no coincide con el valor del límite; es decir, $\lim_{x \to x_1} f(x) \neq f(x_1)$.

   Este tipo de discontinuidad se llama evitable porque lo es si, en lugar de la función $y = f(x)$, se considera otra función $y = f^*(x)$ cuyo valor $f^*(x_1)$ en el punto $x = x_1$ sea el valor del límite de la función $y = f(x)$ cuando x tiende a x_1 [límite que coincide con el límite de la función considerada $y = f^*(x)$ cuando x tiende a x_1]; es decir, $\lim_{x \to x_1} f^*(x) = \lim_{x \to x_1} f(x) = f^*(x_1)$.

2) Discontinuidad de **primera especie:** si existen los límites laterales de la función $y = f(x)$ cuando x tiende a x_1, pero no coinciden los valores de ambos (por tanto, no existe el límite de la función $y = f(x)$ cuando x tiende a x_1); es decir, $\lim_{x \to x_1^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_1^+} f(x)$.

3) Discontinuidad de **segunda especie:** si no existe alguno de los límites laterales de la función $y = f(x)$ cuando x tiende a x_1 o ninguno de los dos.

Aplicando los conceptos anteriores, se tiene:

a) Como es una función racional, es continua en todos los puntos para los que no se anula el denominador. Es decir, la función es discontinua en el punto que hace $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

Para averiguar el tipo de discontinuidad se calcula el límite de $y = f(x)$ cuando x tiende a 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{1^3 - 3 \cdot 1 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}.$$

La indeterminación indica que el numerador y el denominador son divisibles por $x - 1$. Descomponiendo en factores el numerador aplicando la regla de Ruffini, resulta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x - 2) = 1^2 + 1 - 2 = 0.$$

El verdadero valor de la función en $x = 1$ es $y = 0$.

Por tanto, en $x = 1$ existe una discontinuidad evitable si se considera la función $f^*(x) = x^2 + x - 2$ tal que:

$$\lim_{x \to 1} f^*(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = f^*(1) = 0.$$

Nota: Se puede calcular el límite de $y = f(x)$ cuando x tiende a 1 hallando los límites laterales:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1 - \epsilon)^3 - 3(1 - \epsilon) + 2}{(1 - \epsilon) - 1} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{-\epsilon^3 + 3\epsilon^2}{-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} (\epsilon^2 - 3\epsilon) = 0.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1 + \epsilon)^3 - 3(1 + \epsilon) + 2}{(1 + \epsilon) - 1} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^3 + 3\epsilon^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} (\epsilon^2 + 3\epsilon) = 0.$$

Como ambos límites coinciden, $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = 0$.

b) Al ser una función racional, es discontinua en los puntos en los que se anula el denominador. Así pues, la función es discontinua en los puntos que hacen $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$.

Se calculan los límites laterales de $y = f(x)$ cuando x tiende a -1 y a 1:

- Límite cuando x tiende a -1:

  1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(-1 - \epsilon)^4 + 1}{(-1 - \epsilon)^2 - 1} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2 + 4\epsilon + 6\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{2\epsilon + \epsilon^2} = \frac{2}{+0} \rightarrow +\infty.$$

  2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(-1 + \epsilon)^4 + 1}{(-1 + \epsilon)^2 - 1} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2 - 4\epsilon + 6\epsilon^2 - 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{-2\epsilon + \epsilon^2} = \frac{2}{-0} \rightarrow -\infty.$$

- Límite cuando x tiende a 1:

  1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1 - \epsilon)^4 + 1}{(1 - \epsilon)^2 - 1} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2 - 4\epsilon + 6\epsilon^2 - 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{-2\epsilon + \epsilon^2} = \frac{2}{-0} \rightarrow -\infty.$$

  2) Límite por la derecha:

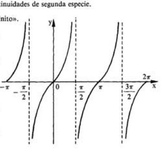
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1 + \epsilon)^4 + 1}{(-1 + \epsilon)^2 - 1} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2 + 4\epsilon + 6\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{2\epsilon + \epsilon^2} = \frac{2}{+0} \rightarrow +\infty.$$

En $x = -1$ y $x = 1$ la función es divergente (no tiene límite ni por la izquierda ni por la derecha) y, por tanto, en dichos puntos existen discontinuidades de segunda especie.

En ambas discontinuidades hay un «salto infinito».

c) En la figura adjunta está representada la función $y = \operatorname{tg} x$ en el intervalo $(-\pi, 2\pi)$.



Esta función es discontinua en los puntos en los que los valores de x son:

$$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

Es decir, es discontinua en $x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, para todo valor entero de $k (\forall k \in Z)$.

Los límites laterales de $y = \operatorname{tg} x$ cuando x tiende a dichos valores x_k son:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to x_k^-} \operatorname{tg} x = +\infty$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to x_k^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

En $x = x_k$ la función $y = \operatorname{tg} x$ es divergente (no tiene límite ni por la izquierda ni por la derecha) y, por consiguiente, en esos puntos existen discontinuidades de segunda especie.

En todas esas discontinuidades hay un «salto infinito».

d) Como es una función logarítmica, está definida para todos los valores de x que hacen $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$. Su dominio de definición es dom. $(y) = (1, +\infty)$.

Es función continua en todos los puntos de su dominio de definición.

Los límites laterales de $y = \ln (x - 1)$ cuando x tiende a 1 (posible punto de discontinuidad) son:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} \ln(x - 1) = \lim_{\epsilon \to 0} \ln[(1 - \epsilon) - 1] = \lim_{\epsilon \to 0} \ln(-\epsilon) \rightarrow \text{no existe.}$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} \ln(x - 1) = \lim_{\epsilon \to 0} \ln[(1 + \epsilon) - 1] = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \epsilon \rightarrow -\infty.$$

En $x = 1$ la función es divergente (no tiene límite ni por la izquierda ni por la derecha) y, en cierto modo, se puede considerar en dicho punto una discontinuidad de segunda especie.

e) Al ser una función logarítmica, está definida para todos los valores de x que hacen $\dfrac{x - 1}{x + 1} > 0$.

Como un cociente es positivo si el numerador y el denominador son ambos positivos o ambos negativos, la inecuación equivale a uno de los dos sistemas siguientes:

$$1) \begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x - 1 < 0, \\ x + 1 < 0. \end{cases}$$

La solución de la inecuación es, pues, la unión de las soluciones de ambos sistemas.

La solución de cada sistema es la intersección de las soluciones de las dos inecuaciones que lo forman.

Solución del sistema 1):

Se resuelve cada inecuación: $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1, +\infty), \\ (-1, +\infty). \end{cases}$

La solución es $(1, +\infty) \cap (-1, +\infty) = (1, +\infty)$.

Solución del sistema 2):

Se resuelve cada inecuación: $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-\infty, 1), \\ (-\infty, -1). \end{cases}$

La solución es $(-\infty, 1) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$.

Solución de la inecuación:

La solución es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

El dominio de definición de la función es, pues, dom. $(y) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Es función continua en todos los puntos de su dominio de definición.

Los límites laterales de $y = f(x)$ cuando x tiende a -1 y a 1, son:

• Límite cuando x tiende a -1:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to -1^-} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{(-1-\epsilon)-1}{(-1-\epsilon)+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{-2-\epsilon}{-\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{2+\epsilon}{\epsilon} \to +\infty.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to -1^+} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{(-1+\epsilon)-1}{(-1+\epsilon)+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{-2+\epsilon}{\epsilon} \to \text{no existe.}$$

• Límite cuando x tiende a 1:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{(1+\epsilon)-1}{(1-\epsilon)+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{-\epsilon}{2-\epsilon} \to \text{no existe.}$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{(1+\epsilon)-1}{(1+\epsilon)+1} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{\epsilon}{2+\epsilon} \to -\infty.$$

En $x = -1$ y $x = 1$ la función es divergente (no tiene límite ni por la izquierda ni por la derecha) y, en cierto modo, se pueden considerar en dichos puntos discontinuidades de segunda especie.

13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $y = e^{1/x}$ en $x = 0$.

b) $y = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ en $x = 0$.

a) Se calculan los límites laterales de $y = e^{1/x}$ cuando x tiende a cero:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{\epsilon \to 0} e^{1/(0-\epsilon)} = \lim_{\epsilon \to 0} e^{-1/\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{e^{1/\epsilon}} = 0.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{\epsilon \to 0} e^{1/(0+\epsilon)} = \lim_{\epsilon \to 0} e^{1/\epsilon} \to +\infty.$$

En $x = 0$ la función tiene límite por la izquierda y no tiene límite por la derecha; por tanto, en dicho punto existe una discontinuidad de segunda especie.

En esa discontinuidad hay un «salto infinito».

b) Se hallan los límites laterales de $y = f(x)$ cuando x tiende a cero:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1 - e^{1/(0-\epsilon)}}{1 + e^{1/(0-\epsilon)}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1 - e^{-1/\epsilon}}{1 + e^{-1/\epsilon}} = \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1 - e^{1/(0+\epsilon)}}{1 + e^{1/(0+\epsilon)}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1 - e^{1/\epsilon}}{1 + e^{1/\epsilon}} = \frac{1 - \infty}{1 + \infty};$$

para resolver la indeterminación se dividen el numerador y el denominador por $e^{1/\epsilon}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\dfrac{1}{e^{1/\epsilon}} - 1}{\dfrac{1}{e^{1/\epsilon}} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

En $x = 0$ la función tiene límite por la izquierda y por la derecha, pero no coinciden los valores de ambos límites; por tanto, en dicho punto existe una discontinuidad de primera especie.

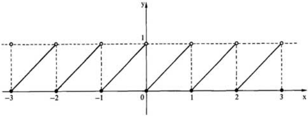
En esa discontinuidad hay un «salto finito» de $1 - (-1) = 2$ unidades.

14. Estudiar la continuidad de $y = x - E[x]$.

(Nota: Por $E[x]$ se designa la «parte entera de x», esto es, el mayor entero menor o igual que x.)

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

En la figura siguiente está representada la función $y = x - E[x]$ en el intervalo $[-3,3]$.



La función está definida para todo valor real de x. Su dominio de definición es, por tanto, dom. $(y) = (-\infty, +\infty)$.

Esta función es discontinua en los puntos en los que los valores de x son números enteros. Es decir, es discontinua en $x_i \in Z$.

Los límites laterales de $y = x - E[x]$ cuando x tiende a dichos valores x_i son:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to x_i^-} (x - E[x]) = 1.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to x_i^+} (x - E[x]) = 0.$$

En $x = x_i$ la función $y = x - E[x]$ tiene límite por la izquierda y por la derecha, pero no coinciden los valores de ambos límites; por consiguiente, en dichos puntos existen discontinuidades de primera especie.

En todas esas discontinuidades hay un «salto finito» de $1 - 0 = 1$ unidad.

Por tanto, la función es continua en todos sus puntos [intervalo $(-\infty, +\infty)$] excepto en los puntos $x_i \in Z$.

15. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - |x| + 2$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

c) $f(x) = \begin{cases} +2, \text{ para } x < 0; \\ x - 2, \text{ para } x \in [0, 4]; \\ x^2 - 4, \text{ para } x > 4. \end{cases}$

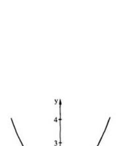
(Propuesto en la Univ. de Oviedo.)

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0; \\ 0, \text{ si } x = 0. \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Santander.)

a) En la figura adjunta está representada la función $f(x) = x^2 - |x| + 2$, que equivale a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, \text{ si } x < 0, \\ 2, \text{ si } x = 0, \\ x^2 - x + 2, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$



- Como las dos funciones (para $x < 0$ y para $x > 0$) son polinómicas, la función $f(x)$ es continua en todos los puntos de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

  Queda por determinar si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$. Para averiguarlo se calculan los límites laterales de la función cuando x tiende a cero:

  1) Límite por la izquierda:

  $$\lim_{x \to 0^-} (x^2 + x + 2) = 2.$$

  2) Límite por la derecha:

  $$\lim_{x \to 0^+} (x^2 - x + 2) = 2.$$

  Al ser iguales los límites por la izquierda y por la derecha, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

  Por tanto, la función $f(x)$ es continua en todos sus puntos [intervalo $(-\infty, +\infty)$].

- La función $f(x)$ es derivable en todos los puntos en los que $x < 0$ [$f'(x) = 2x + 1$] y en los que $x > 0$ [$f'(x) = 2x - 1$)].

  Queda por determinar si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$. Para averiguarlo se hallan las derivadas laterales de la función cuando x tiende a cero:

  1) Derivada por la izquierda:

  $$f'(0)^- = 2 \cdot 0 + 1 = 1.$$

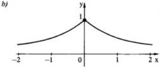
  2) Derivada por la derecha:

  $$f'(0)^+ = 2 \cdot 0 - 1 = -1.$$

  En $x = 0$ la función $f(x)$ tiene derivada por la izquierda y por la derecha, pero no coinciden los valores de ambas; por tanto, en dicho punto la función $f(x)$ no admite derivada.

  Es decir, la función $f(x)$ es derivable en todos sus puntos salvo en el punto $x = 0$.

b)



En la figura adjunta está representada la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|}$, que equivale a la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x}, \text{ si } x < 0, \\ 1, \text{ si } x = 0, \\ \dfrac{1}{1 + x}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

- Como las dos funciones (para $x < 0$ y para $x > 0$) son racionales, son continuas en todos los puntos para los que no se anula el respectivo denominador. Es decir, la función $f(x)$ es continua en todos los puntos de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Para determinar si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ se calculan los límites laterales de la función cuando x tiende a cero:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 - x} = 1.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + x} = 1.$$

Como los límites por la izquierda y por la derecha son iguales, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en todos sus puntos [intervalo $(-\infty, +\infty)$].

- La función $f(x)$ es derivable en todos los puntos en los que $x < 0 \left[f'(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^2} \right]$ y en los que $x > 0 \left[f'(x) = -\dfrac{1}{(1 + x)^2} \right]$.

Para determinar si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$ se hallan las derivadas laterales de la función cuando x tiende a cero:

1) Derivada por la izquierda:

$$f'(0)^- = \frac{1}{(1 - 0)^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

2) Derivada por la derecha:

$$f'(0)^+ = -\frac{1}{(1 + 0)^2} = -\frac{1}{1} = -1.$$

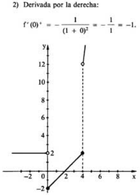
En $x = 0$ la función $f(x)$ tiene derivada por la izquierda y por la derecha, pero no coinciden los valores de ambas; por consiguiente, en dicho punto la función $f(x)$ no admite derivada.

Es decir, la función $f(x)$ es derivable en todos sus puntos excepto en el punto $x = 0$.

c) En la figura adjunta está representada la función:

$$f(x) = \begin{cases} +2, \text{ para } x < 0, \\ x - 2, \text{ para } x \in [0, 4], \\ x^2 - 4, \text{ para } x > 4. \end{cases}$$

- Como la primera función (para $x < 0$) es constante y las otras dos (para $x \in [0, 4]$ y para $x > 4$) son polinómicas, la función $f(x)$ es continua en todos los puntos de los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, +\infty)$.



Para determinar si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y en $x = 4$ se calculan los límites laterales de la función cuando x tiende a cero y cuando x tiende a 4:

—Límite cuando x tiende a cero:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} (+2) = 2.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2.$$

—Límite cuando x tiende a 4:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 4^-} (x - 2) = 4 - 2 = 2.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 4^+} (x^2 - 4) = 16 - 4 = 12.$$

En $x = 0$ y $x = 4$ la función $f(x)$ tiene límite por la izquierda y por la derecha, pero en ninguno de los dos puntos coinciden los valores de ambos límites; por tanto, en dichos puntos existen discontinuidades de primera especie.

En la primera discontinuidad hay un «salto finito» de $2 - (-2) = 4$ unidades y en la segunda, un «salto finito» de $12 - 2 = 10$ unidades.

Así pues, la función $f(x)$ es continua en todos sus puntos [intervalo $(-\infty, +\infty)$] excepto en los puntos $x = 0$ y $x = 4$.

- La función $f(x)$ es derivable en todos los puntos en los que $x < 0$ [$f'(x) = 0$], en los que $x \in (0, 4)$ [$f'(x) = 1$] y en los que $x > 4$ [$f'(x) = 2x$].

Para determinar si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $x = 4$ se hallan las derivadas laterales de la función cuando x tiende a cero y cuando x tiende a 4:

—Derivada cuando x tiende a cero:

1) Derivada por la izquierda:

$$f'(0)^- = 0.$$

2) Derivada por la derecha:

$$f'(0)^+ = 1.$$

—Derivada cuando x tiende a 4:

1) Derivada por la izquierda:

$$f'(4)^- = 1.$$

2) Derivada por la derecha:

$$f'(4)^+ = 2 \cdot 4 = 8.$$

En $x = 0$ y $x = 4$ la función $f(x)$ tiene derivada por la izquierda y por la derecha, pero en ninguno de los dos puntos coinciden los valores de ambas; por consiguiente, en dichos puntos la función $f(x)$ no admite derivada.

Así pues, la función $f(x)$ es derivable en todos sus puntos salvo en los puntos $x = 0$ y $x = 4$.

d) • El posible punto de discontinuidad de la función $f(x)$ es el que anula el denominador de la fracción del seno. Es decir, la función puede ser discontinua en $x = 0$.

Para determinar si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ se calculan los límites laterales de la función cuando x tiende a cero:

1) Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

2) Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Ambos límites son nulos porque el valor del sen $\frac{1}{x}$ está acotado (toma cualquier valor comprendido entre $+1$ y -1) y al multiplicarlo por x^2, que tiende a cero cuando x tiende a cero, resulta que el producto también tiende a cero.

Como los límites por la izquierda y por la derecha son iguales, la función f(x) es continua en $x = 0$.

Por tanto, la función f(x) es continua en todos sus puntos [intervalo $(-\infty, +\infty)$].

- La derivada de la función es:

$$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \cos\frac{1}{x} = 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Dicha función derivada está definida para todo valor real de $x \neq 0$. Es decir, la función f(x) es derivable en todos los puntos en los que $x \neq 0$.

Para determinar si la función f(x) es derivable en $x = 0$, al no estar definida la función derivada (obtenida aplicando las reglas de derivación) para $x = 0$, se halla la derivada en $x = 0$ mediante la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

Recuérdese lo expuesto anteriormente de que el valor del sen $\frac{1}{x}$ está acotado; por eso, al multiplicarlo por x, que tiende a cero cuando x tiende a cero, resulta que el producto también tiende a cero.

En $x = 0$ la función f(x) admite derivada.

Es decir, la función f(x) es derivable en todos sus puntos.

Nota: En la práctica suele calcularse el valor de la derivada de una función en un punto particularizando el valor de la función derivada para las coordenadas del punto. El proceso es válido siempre que se obtenga un valor definido; por el contrario, si dicho valor no existe, hay que aplicar la definición de derivada para obtener el valor de la derivada de la función en el punto.

16. Probar que la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8}$ no es continua en $x = 1$. Indicar qué tipo de discontinuidad se presenta en dicho punto.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

El valor de la función f(x) para $x = 1$ es: $f(1) = \dfrac{1^2 - 1}{1^3 + 7 \cdot 1 - 8} = \dfrac{0}{0}$.

La indeterminación indica que la función f(x) no está definida en el punto $x = 1$; por tanto, no es continua en dicho punto.

Para estudiar el tipo de discontinuidad se halla el límite de la función f(x) cuando x tiende a 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8} = \frac{1^2 - 1}{1^3 + 7 \cdot 1 - 8} = \frac{0}{0}.$$

La indeterminación señala que el numerador y el denominador son divisibles por $x - 1$. Descomponiendo ambos en factores aplicando la regla de Ruffini, se obtiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 8)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 8} = \frac{1 + 1}{1^2 + 1 + 8} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

El verdadero valor de la función en $x = 1$ es $f(1) = \dfrac{1}{5}$.

Por tanto, en $x = 1$ existe una discontinuidad evitable si se considera la función $f^*(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+8}$ tal que:

$$\lim_{x \to 1} f^*(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = f^*(1) = \frac{1}{5}.$$

Nota: Se podría calcular el límite de la función f(x) cuando x tiende a 1 hallando los límites por la izquierda y por la derecha. Se procedería de forma similar a la seguida en el apartado *a)* del ejercicio **12** de este mismo tema.

17. Hallar las derivadas y las diferenciales n-ésimas de las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen } 2x$.

b) $y = \cos 4x$.

c) $y = \dfrac{2}{x+1}$.

d) $y = \dfrac{2}{1-2x}$.

Se calculan las derivadas primera, segunda, tercera, ...; a partir de ellas se busca la ley de formación de las derivadas sucesivas y, si la ley existe, se halla la derivada n-ésima. Esta última permite calcular la diferencial n-ésima.

a) $y' = 2 \cdot \cos 2x$; $y'' = -4 \cdot \text{sen } 2x$; $y^{(3} = -8 \cdot \cos 2x$; $y^{(4} = 16 \cdot \text{sen } 2x$; $y^{(5} = 32 \cdot \cos 2x$; ...

Teniendo en cuenta las adecuadas relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos, las derivadas sucesivas anteriores se pueden escribir:

$$y' = 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \text{sen}\left(2x + \frac{1}{2} \cdot \pi\right); \qquad y'' = -4 \cdot \text{sen } 2x = 2^2 \cdot \text{sen}\left(2x + \frac{2}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y^{(3} = -8 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \text{sen}\left(2x + \frac{3}{2} \cdot \pi\right); \quad y^{(4} = 16 \cdot \text{sen } 2x = 2^4 \cdot \text{sen}\left(2x + \frac{4}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y^{(5} = 32 \cdot \cos 2x = 2^5 \cdot \text{sen}\left(2x + \frac{5}{2} \cdot \pi\right); \quad \ldots$$

Por tanto, la derivada n-ésima es $y^{(n} = 2^n \cdot \text{sen}\left(2x + \dfrac{n}{2} \cdot \pi\right)$.

La diferencial n-ésima es $d^n y = 2^n \cdot \text{sen}\left(2x + \dfrac{n}{2} \cdot \pi\right) \cdot dx^n$.

b) $y' = -4 \cdot \text{sen } 4x$; $y'' = -16 \cdot \cos 4x$; $y^{(3} = 64 \cdot \text{sen } 4x$; $y^{(4} = 256 \cdot \cos 4x$;

$$y^{(5} = -1\,024 \cdot \text{sen } 4x; \quad \ldots$$

Teniendo en cuenta, como en el apartado precedente, las adecuadas relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos, las anteriores derivadas sucesivas se pueden escribir:

$$y' = -4 \cdot \text{sen } 4x = 4 \cdot \cos\left(4x + \frac{1}{2} \cdot \pi\right); \quad y'' = -16 \cdot \cos 4x = 4^2 \cdot \cos\left(4x + \frac{2}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y^{(3} = 64 \cdot \text{sen } 4x = 4^3 \cdot \cos\left(4x + \frac{3}{2} \cdot \pi\right); \quad y^{(4} = 256 \cdot \cos 4x = 4^4 \cdot \cos\left(4x + \frac{4}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y^{(5} = -1\,024 \cdot \text{sen } 4x = 4^5 \cdot \cos\left(4x + \frac{5}{2} \cdot \pi\right); \quad \ldots$$

Por tanto, la derivada n-ésima es $y^{(n} = 4^n \cdot \cos\left(4x + \frac{n}{2} \cdot \pi\right)$.

La diferencial n-ésima es $d^n y = 4^n \cdot \cos\left(4x + \frac{n}{2} \cdot \pi\right) \cdot dx^n$.

c) $y' = -\frac{2 \cdot 1}{(x+1)^2}$; $y'' = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{(x+1)^3}$;

$y^{(3} = -\frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = -\frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)^4}$;

$y^{(4} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(x+1)^3}{(x+1)^8} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(x+1)^5}$; ...

Se observa que:

- Las derivadas impares tienen signo $-$ y las pares tienen signo $+$; el signo se expresa en forma general por $(-1)^n$.
- Salvo en lo que respecta al signo, los numeradores son $2 \cdot 1 = 2 \cdot 1!$, para $n = 1$; $2 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot 2!$, para $n = 2$; $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3!$, para $n = 3$; $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 4!$, para $n = 4$; ...; en general los numeradores se expresan por $2 \cdot n!$
- Los denominadores son potencias de base $(x + 1)$, cuyos exponentes son 2, para $n = 1$; 3, para $n = 2$; 4, para $n = 3$; 5, para $n = 4$; ...; los exponentes se expresan en forma general por $(n + 1)$ y las potencias por $(x + 1)^{n+1}$.

Así pues, la derivada n-ésima es $y^{(n} = (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$.

La diferencial n-ésima es $d^n y = (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot n!}{(x+1)^{n+1}} \cdot dx^n$.

d) $y' = -\frac{(-2) \cdot 2}{(1-2x)^2} = \frac{2^2 \cdot 1}{(1-2x)^2}$; $y'' = -\frac{2(1-2x)(-2) \cdot 2^2}{(1-2x)^4} = \frac{2^3 \cdot 2}{(1-2x)^3}$;

$y^{(3} = -\frac{3(1-2x)^2(-2) \cdot 2^4}{(1-2x)^6} = \frac{2^4 \cdot 2 \cdot 3}{(1-2x)^4}$; $y^{(4} = -\frac{4(1-2x)^3(-2) \cdot 2^5 \cdot 3}{(1-2x)^8} = \frac{2^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-2x)^5}$;

$y^{(5} = -\frac{5(1-2x)^4(-2) \cdot 2^6 \cdot 3 \cdot 4}{(1-2x)^{10}} = \frac{2^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1-2x)^6}$; ...

Se observa que:

- Todas las derivadas tienen signo $+$.
- Los numeradores son $2^2 \cdot 1 = 2^2 \cdot 1!$, para $n = 1$; $2^3 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2!$, para $n = 2$;

  $2^4 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3!$, para $n = 3$; $2^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2^5 \cdot 4!$, para $n = 4$; ...; en general los numeradores se expresan por $2^{n+1} \cdot n!$
- Los denominadores son potencias de base $(1 - 2x)$, cuyos exponentes son 2, para $n = 1$; 3, para $n = 2$; 4, para $n = 3$; 5, para $n = 4$; ...; los exponentes se expresan en general por $(n + 1)$ y las potencias por $(1 - 2x)^{n+1}$.

Por tanto, la derivada n-ésima es $y^{(n} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(1-2x)^{n+1}}$.

La diferencial n-ésima es $d^n y = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(1-2x)^{n+1}} \cdot dx^n$.

18. Hallar la derivada n-ésima de $y = \dfrac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$.

(**Sugerencia:** Descomponer en suma de fracciones simples.)

Se descompone el denominador de la función en factores, $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, y se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{(A + B)x - (A + 2B)}{(x - 2)(x - 1)}.$$

Identificando los respectivos coeficientes de los numeradores de las fracciones primera y última, se obtiene:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ A + 2B = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 2. \end{cases}$$

Es decir, hay que hallar la derivada n-ésima de la función $y = \dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{2}{x - 1}$.

$$y' = -\frac{3 \cdot 1}{(x - 2)^2} - \frac{2 \cdot 1}{(x - 1)^2} = -\left[\frac{3 \cdot 1}{(x - 2)^2} + \frac{2 \cdot 1}{(x - 1)^2}\right];$$

$$y'' = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2(x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{(x - 2)^3} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{(x - 1)^3};$$

$$y^{(3} = -\frac{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(x - 2)^2}{(x - 2)^6} - \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(x - 1)^2}{(x - 1)^6} = -\left[\frac{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(x - 2)^4} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(x - 1)^4}\right];$$

$$y^{(4} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(x - 2)^3}{(x - 2)^8} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(x - 1)^3}{(x - 1)^6} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(x - 2)^5} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(x - 1)^5};$$

...

Se observa que:

- Las derivadas impares tienen signo − y las pares tienen signo +; el signo se expresa en forma general por $(-1)^n$.
- Excepto en lo que respecta al signo, los numeradores de las dos fracciones, cuya suma (de las fracciones) es la correspondiente derivada, son $3 \cdot 1 = 3 \cdot 1!$ y $2 \cdot 1 = 2 \cdot 1!$, para $n = 1$; $3 \cdot 1 \cdot 2 = 3 \cdot 2!$ y $2 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot 2!$, para $n = 2$; $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 3!$ y $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3!$, para $n = 3$; ...; en general los numeradores se expresan, respectivamente, por $3 \cdot n!$ y por $2 \cdot n!$
- Los denominadores de las dos fracciones, cuya suma (de las fracciones) es la correspondiente derivada, son potencias de bases respectivas $(x - 2)$ y $(x - 1)$, cuyos exponentes son 2, para $n = 1$; 3, para $n = 2$; 4, para $n = 3$; ...; los exponentes se expresan en general por $(n + 1)$ y las potencias, respectivamente, por $(x - 2)^{n+1}$ y por $(x - 1)^{n+1}$.

Así pues, la derivada n-ésima es $y^{(n} = (-1)^n \cdot \left[\dfrac{3 \cdot n!}{(x - 2)^{n+1}} + \dfrac{2 \cdot n!}{(x - 1)^{n+1}}\right]$.

19. Como aplicación del ejercicio resuelto **3**, hallar la derivada n-ésima de las funciones:

a) $y = e^x \cdot x^2$. *b)* $y = x^3 \cdot e^{2x}$. *c)* $y = e^x \cdot \operatorname{sen} x$.

El ejercicio resuelto **3** permite calcular la derivada n-ésima del producto de dos funciones derivables, al menos, n veces.

Considerando las funciones u(x) y v(x) y representando su producto por $y = u \cdot v$, el resultado obtenido en dicho ejercicio es:

$$y^{(n} = u^{(n}v + \binom{n}{1}u^{(n-1}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2}v'' + \ldots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1} + \binom{n}{n}u \cdot v^{(n}, \quad (n \in N^*).$$

Se calculan, pues, las derivadas primera, segunda, ... y n-ésima de las funciones factores y se aplica la fórmula anterior, que es la llamada fórmula de Leibniz.

a) En este caso $u = e^x$ y $v = x^2$.

- $u' = u'' = u^{(3} = \ldots = u^{(n-1} = u^{(n} = e^x$.
- $v' = 2x;\ v'' = 2;\ v^{(3} = v^{(4} = \ldots = v^{(n-1} = v^{(n} = 0$.

La derivada n-ésima de $y = u \cdot v$ es:

$$y^{(n} = e^x \cdot x^2 + \binom{n}{1}e^x \cdot 2x + \binom{n}{2}e^x \cdot 2 + \binom{n}{3}e^x \cdot 0 + \ldots + \binom{n}{n-1}e^x \cdot 0 + \binom{n}{n}e^x \cdot 0.$$

Como a partir del cuarto sumando todos los sumandos son nulos, queda:

$$y^{(n} = e^x \cdot x^2 + \binom{n}{1}e^x \cdot 2x + \binom{n}{2}e^x \cdot 2.$$

b) En este ejercicio $u = x^3$ y $v = e^{2x}$.

- $u' = 3x^2;\ u'' = 6x;\ u^{(3} = 6;\ u^{(4} = u^{(5} = \ldots = u^{(n-1} = u^{(n} = 0$.
- $v' = 2 \cdot e^{2x};\ v'' = 2^2 \cdot e^{2x};\ v^{(3} = 2^3 \cdot e^{2x};\ \ldots;\ v^{(n-1} = 2^{n-1} \cdot e^{2x};\ v^{(n} = 2^n \cdot e^{2x}$.

La derivada n-ésima de $y = u \cdot v$ es:

$$y^{(n} = 0 \cdot e^{2x} + \ldots + \binom{n}{n-3}6 \cdot 2^{n-3} \cdot e^{2x} + \binom{n}{n-2}6x \cdot 2^{n-2} \cdot e^{2x} +$$

$$+ \binom{n}{n-1}3x^2 \cdot 2^{n-1} \cdot e^{2x} + \binom{n}{n}x^3 \cdot 2^n \cdot e^{2x}.$$

Como los primeros sumandos son nulos, queda:

$$y^{(n} = \binom{n}{n-3}6 \cdot 2^{n-3} \cdot e^{2x} + \binom{n}{n-2}6x \cdot 2^{n-2} \cdot e^{2x} +$$

$$+ \binom{n}{n-1}3x^2 \cdot 2^{n-1} \cdot e^{2x} + \binom{n}{n}x^3 \cdot 2^n \cdot e^{2x}.$$

c) En este caso $u = e^x$ y $v = \operatorname{sen} x$.

- $u' = u'' = u^{(3} = \ldots = u^{(n-1} = u^{(n} = e^x$.
- $v' = \cos x;\ v'' = -\operatorname{sen} x;\ v^{(3} = -\cos x;\ v^{(4} = \operatorname{sen} x;\ v^{(5} = \cos x;\ \ldots$

Teniendo en cuenta las adecuadas relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos, las derivadas sucesivas anteriores se pueden escribir:

$$v' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2} \cdot \pi\right); \qquad v'' = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2}{2} \cdot \pi\right);$$

$$v^{(3} = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3}{2} \cdot \pi\right); \qquad v^{(4} = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{4}{2} \cdot \pi\right);$$

$$v^{(5} = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{5}{2} \cdot \pi\right); \qquad \ldots$$

Por tanto, la derivada n-ésima de v es $v^{(n} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2} \cdot \pi\right)$.

La derivada n-ésima de $y = u \cdot v$ es:

$$y^{(n} = e^x \cdot \operatorname{sen} x + \binom{n}{1} e^x \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2} \cdot \pi\right) + \dots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} e^x \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{n-1}{2} \cdot \pi\right) + \binom{n}{n} e^x \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2} \cdot \pi\right).$$

20. Hallar la derivada vigésima cuarta de $y = a \cdot \operatorname{sen} bx$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Se calcula la expresión de la derivada n-ésima y se sustituye n por 24.

$y' = ab \cdot \cos bx$; $y'' = -ab^2 \cdot \operatorname{sen} bx$; $y^{(3} = -ab^3 \cdot \cos bx$;

$y^{(4} = ab^4 \cdot \operatorname{sen} bx$; $y^{(5} = ab^5 \cdot \cos bx$; ...

Teniendo en cuenta las adecuadas relaciones entre las razones trigonométricas de ciertos ángulos, las anteriores derivadas sucesivas se pueden escribir:

$$y' = ab \cdot \cos bx = ab \cdot \operatorname{sen}\left(bx + \frac{1}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y'' = -ab^2 \cdot \operatorname{sen} bx = ab^2 \cdot \operatorname{sen}\left(bx + \frac{2}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y^{(3} = -ab^3 \cdot \cos bx = ab^3 \cdot \operatorname{sen}\left(bx + \frac{3}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y^{(4} = ab^4 \cdot \operatorname{sen} bx = ab^4 \cdot \operatorname{sen}\left(bx + \frac{4}{2} \cdot \pi\right);$$

$$y^{(5} = ab^5 \cdot \cos bx = ab^5 \cdot \operatorname{sen}\left(bx + \frac{5}{2} \cdot \pi\right);$$

...

Por tanto, la derivada n-ésima es $y^{(n} = ab^n \cdot \operatorname{sen}\left(bx + \frac{n}{2} \cdot \pi\right)$.

La derivada vigésima cuarta es $y^{(24} = ab^{24} \cdot \operatorname{sen}\left(bx + \frac{24}{2} \cdot \pi\right) = ab^{24} \cdot \operatorname{sen}(bx + 12 \cdot \pi) =$ $= ab^{24} \cdot \operatorname{sen} bx$.

21. Obtener y' e y'' en la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Derivando respecto a x los dos miembros de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, se obtiene:

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{x}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0 \quad \text{(I)} \rightarrow \frac{yy'}{b^2} = \frac{x}{a^2} \rightarrow y' = \frac{b^2x}{a^2y}. \quad \text{(II)}$$

Derivando de nuevo respecto a x los dos miembros de la igualdad (I), resulta:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{(y')^2 + yy''}{b^2} = 0 \xrightarrow{\text{por (II)}} \frac{1}{a^2} - \frac{\frac{b^4x^2}{a^4y^2} + yy''}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^4y^2} - \frac{yy''}{b^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{yy''}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^4y^2} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^4y^2} \rightarrow y'' = \frac{b^2(a^2y^2 - b^2x^2)}{a^4y^3}. \quad \text{(III)}$$

De la ecuación de la hipérbola se deduce que $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; sustituyendo en (III), se obtiene:

$$y'' = \frac{b^2(-a^2b^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Nota: Para hallar y′ e y″ se puede despejar y en la ecuación de la hipérbola y derivar a continuación, pero las operaciones resultan, en general, más laboriosas que empleando el método utilizado en este ejercicio.

22. Calcular la función diferencial primera de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Se utiliza en este ejercicio el método sugerido en la nota del ejercicio anterior.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \rightarrow a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} \rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Se halla de derivada de y respecto a x:

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

La función diferencial primera es $dy = y' \cdot dx = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx.$

23. Demostrar que las curvas $e^x \cos y = e^a \cos b$ y $e^x \operatorname{sen} y = e^a \operatorname{sen} b$ se cortan ortogonalmente.

(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)

Para demostrar que las curvas se cortan ortogonalmente hay que razonar que se cortan formando un ángulo recto o, también, que las tangentes a las curvas en su punto de intersección son perpendiculares.

Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de las curvas para hallar el punto de intersección de ambas:

$$\left.\begin{array}{l} e^x \cos y = e^a \cos b \\ \\ e^x \operatorname{sen} y = e^a \operatorname{sen} b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x = \dfrac{e^a \cos b}{\cos y} \\ \\ \dfrac{e^a \cos b}{\cos y} \operatorname{sen} y = e^a \operatorname{sen} b; \;\; \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b \rightarrow y = b. \end{array}\right.$$

Sustituyendo en la primera ecuación el valor de y, se tiene: $e^x = \dfrac{e^a \cos b}{\cos b} = e^a \rightarrow x = a.$

Las curvas se cortan en el punto P(**a**, b).

Derivando las dos funciones, se deduce:

$$e^x \cos y - e^x y' \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y' = \frac{e^x \cos y}{e^x \operatorname{sen} y} = \operatorname{cotg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = f'(x, y);$$

$$e^x \operatorname{sen} y + e^x y' \cos y = 0 \rightarrow y' = -\frac{e^x \operatorname{sen} y}{e^x \cos y} = -\operatorname{tg} y = g'(x, y).$$

Ángulo φ_P que forman las curvas en el punto P(a, b):

Se hallan los respectivos valores de las derivadas para las coordenadas del punto P y se sustituyen en la fórmula que da el valor de tg φ_P:

$$f'(a, b) = \operatorname{cotg} b = \frac{1}{\operatorname{tg} b}; \qquad g'(a, b) = -\operatorname{tg} b.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_P = \frac{g'(a, b) - f'(a, b)}{1 + f'(a, b) \cdot g'(a, b)} = \frac{-\operatorname{tg} b - \dfrac{1}{\operatorname{tg} b}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tg} b} \cdot (-\operatorname{tg} b)};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_P = -\frac{\operatorname{tg}^2 b + 1}{\operatorname{tg} b(1 - 1)} = -\frac{1 + \operatorname{tg}^2 b}{0} \rightarrow \infty.$$

Como tg $\varphi_P \rightarrow \infty$, $\varphi_P = 90°$, lo que indica que las curvas se cortan ortogonalmente en el punto P.

A la misma conclusión se llega observando que $f'(a, b)$ y $g'(a, b)$, que son las pendientes de las respectivas rectas tangentes a las curvas en su punto de intersección P(a, b), cumplen la relación $f'(a, b) = -\dfrac{1}{g'(a, b)}$, que es la condición para que dos rectas sean perpendiculares.

En efecto: $f'(a, b) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} b} = -\dfrac{1}{-\operatorname{tg} b} = -\dfrac{1}{g'(a, b)}$.

TEMA III-2.1. ——— Propiedades de las funciones derivables

Ejercicios resueltos

1. *Demostrar que la ecuación* $x^2 = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x$ *tiene exactamente dos raíces.*

   (Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Se forma la función $f(x) = x^2 - x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x$.

Como $f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x - x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x = x \cdot (2 - \cos x)$ y dado que $(2 - \cos x)$ es siempre positivo, se tiene:

$f(x)$ es decreciente si $x < 0$ y $f(x)$ es creciente si $x > 0$.

Para $x = -\frac{\pi}{2}$: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0.$

Para $x = 0$: $f(0) = 0^2 - 0 \cdot \operatorname{sen} 0 - \cos 0 = -1 < 0.$

Para $x = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} > 0.$

Como $f(x)$ es continua y derivable en $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ y en los extremos toma valores de signo contrario, por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto $x = c_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ en el que $f(c_1) = 0$, que además es único por ser $f(x)$ decreciente en el referido intervalo.

Por tanto, $x = c_1$ es una solución de la ecuación dada.

Análogo razonamiento permite comprobar que existe un $c_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que $f(c_2) = 0$ y que además es único por ser $f(x)$ creciente en el intervalo.

Por tanto, $x = c_2$ es otra solución de la ecuación dada.

En consecuencia, la ecuación tiene dos únicas soluciones.

2. *Sean* $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ *y* $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. *Comprobar que no existe ningún punto* $t \in (0, 1)$ *en el que se cumpla:* $\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ *y explicar la aparente contradicción con el teorema de Cauchy.*

   (Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

$$f(1) = 3 - 2 - 1 + 1 = 1; \quad f(0) = 1; \quad g(1) = 4 - 3 - 2 = -1; \quad g(0) = 0;$$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 2x; \quad g'(x) = 12x^2 - 6x - 2.$$

Sustituyendo:

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{1 - 1}{-1 - 0} = \frac{0}{-1} = 0 \neq \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{12t^3 - 6t^2 - 2t}{12t^2 - 6t - 2} = \frac{t(12t^2 - 6t - 2)}{12t^2 - 6t - 2} = t.$$

Por consiguiente, si cumpliera el teorema de Cauchy, $t = 0$; pero como $t = 0 \notin (0, 1)$ (es intervalo abierto y no contiene a los extremos), no se cumple el teorema de Cauchy.

El motivo de esta aparente contradicción es que $f'(x)$ y $g'(x)$ se anulan simultáneamente en los puntos:

$$12x^2 - 6x - 2 = 0 \rightarrow 6x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{12} \rightarrow x_1 = 0{,}728...;\ x_2 = -0{,}228...$$

y como $0{,}728... \in (0, 1)$, no se cumple la condición del teorema de Cauchy de que $f'(x)$ y $g'(x)$ no se anulen simultáneamente en ningún punto del intervalo.

3. *Si* $x > 0$, *demostrar que* $x > \ln(x + 1) > \dfrac{x}{x + 1}$.

(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)

Se forma la función $f(x) = x - \ln(x + 1)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x + 1} > 0, \text{ porque por hipótesis } x > 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es creciente; además, para $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 - \ln 1 = 0$; por consiguiente:

$$f(x) > 0; \text{ es decir: } x - \ln(x + 1) > 0 \rightarrow x > \ln(x + 1), \text{ para } x > 0.$$

Análogamente si se considera la función $g(x) = \ln(x + 1) - \dfrac{x}{x + 1}$:

$$g'(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{x}{(x + 1)^2} > 0, \text{ ya que } x > 0 \text{ por el enunciado.}$$

Por tanto, $g(x)$ es creciente; además, para $x = 0 \rightarrow g(0) = 0$; por consiguiente:

$$g(x) > 0; \text{ es decir: } \ln(x + 1) - \frac{x}{x + 1} > 0 \rightarrow \ln(x + 1) > \frac{x}{x + 1}, \text{ para } x > 0.$$

4. *Hallar* $\lim\limits_{x \to 1} [(x - 1) \cdot \ln(x - 1)]$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

$$\lim_{x \to 1} [(x - 1) \cdot \ln(x - 1)] = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x - 1)}{\frac{1}{x - 1}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x - 1}}{-\frac{1}{(x - 1)^2}} = -\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

5. *Hallar* $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

(Propuesto en la Univ. de León.)

Tomando logaritmos neperianos en $A = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$, resulta:

$$\ln A = \ln[\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}] = \lim_{x \to 0} [\ln(\cos x)^{1/x^2}] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \ln \cos x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x \cdot \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2 \cdot \cos x - 2x \cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{-\cos 0}{2 \cdot \cos 0 - 2 \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0} = \frac{-1}{2}.$$

Por tanto: $\ln A = -\dfrac{1}{2} \rightarrow A = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

6. *Hallar* $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$.

Tomando logaritmos neperianos en $A = \lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$, resulta:

$$\ln A = \ln(\lim_{x \to \infty} x^{1/x}) = \lim_{x \to \infty} (\ln x^{1/x}) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \ln x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Por consiguiente: $\ln A = 0 \rightarrow A = \lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x} = e^0 = 1$.

Solución de los ejercicios propuestos

1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

a) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$.

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

Se halla la derivada de cada función y se calculan los puntos críticos, que son los puntos en los que existe $f'(x)$ y se anula, o bien los puntos en los que $f'(x)$ no existe [$f'(x)$ es discontinua], pero sí existe $f(x)$.

Se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos críticos en la recta real. Si $f'(x)$ es positiva, la función es creciente; si $f'(x)$ es negativa, la función es decreciente.

a) $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8)$.

$$y' = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2.$$

Son puntos críticos los de abscisas 2 y 4.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$ y $(4, +\infty)$, determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
y'	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(4, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(2, 4)$.

b) $y' = \dfrac{3x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$.

$$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Los valores que anulan el denominador de y' son puntos de discontinuidad de la función y':

$\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2} = 0 \rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$; para resolver la ecuación se descompone el polinomio del primer miembro en factores aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr|r} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2 (x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2.$$

Por tanto, son puntos críticos (es decir, los puntos que anulan y' y los puntos de discontinuidad de y') los de abscisas -2, -1 y 1.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	+	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$ y $(1, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

2. Hallar los máximos y mínimos relativos de las funciones:

a) $y = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 1$.

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$.

c) $y = (x - 1)^4 \cdot (x + 2)^3$, después de haber estudiado los intervalos de crecimiento.

d) $y = (x - a)^{2n+1} \cdot (x - b)^{2n}$.

Si f(x) es una función derivable con continuidad, sus extremos relativos corresponden a los valores de x en los que f'(x) pasa de positiva a negativa [máximo relativo de f(x)] o de negativa a positiva [mínimo relativo de f(x)]. En tales valores de x se cumple que $f'(x) = 0$, que es la condición necesaria (no suficiente) para la existencia de extremos relativos.

Para determinar los extremos relativos se puede emplear también el criterio de la segunda derivada [$f''(x) < 0$ para los máximos relativos y $f''(x) > 0$ para los mínimos relativos, en los valores de x que anulan f'(x)].

a) $y' = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x^3 - 2x^2 - x + 2)$.

$y' = 0 \rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; para resolver la ecuación se descompone el polinomio del primer miembro en factores aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr|r} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x^2 - 3x + 2) = (x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2.$$

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$, determinados por los valores de x que anulan y':

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
y'	−	+	−	+

La función presenta mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 2$, porque y' pasa de negativa a positiva; presenta máximo relativo en $x = 1$, puesto que y' pasa de positiva a negativa.

Para hallar las ordenadas de los extremos relativos se calculan los valores de la función para los correspondientes valores de x:

- $y(-1) = 3(-1)^4 - 8(-1)^3 - 6(-1)^2 + 24(-1) - 1 = 3 + 8 - 6 - 24 - 1 = -20 \rightarrow$

  $\rightarrow$ mínimo relativo en el punto $(-1, -20)$.

- $y(1) = 3 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 1 = 3 - 8 - 6 + 24 - 1 = 12 \rightarrow$

  $\rightarrow$ máximo relativo en el punto (1, 12).

- $y(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 1 = 48 - 64 - 24 + 48 - 1 = 7 \rightarrow$

  $\rightarrow$ mínimo relativo en el punto (2, 7).

Se pueden comprobar los resultados anteriores aplicando el criterio de la segunda derivada.

$y'' = 36x^2 - 48x - 12 = 12(3x^2 - 4x - 1)$.

Se calculan los valores de y'' para los valores de x que anulan y':

- $y''(-1) = 12[3(-1)^2 - 4(-1) - 1] = 12(3 + 4 - 1) = 12 \cdot 6 = 72 > 0 \rightarrow$

  $\rightarrow$ en $x = -1$ hay mínimo relativo.

- $y''(1) = 12(3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1) = 12(3 - 4 - 1) = 12(-2) = -24 < 0 \rightarrow$

  $\rightarrow$ en $x = 1$ hay máximo relativo.

- $y''(2) = 12(3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 1) = 12(12 - 8 - 1) = 12 \cdot 3 = 36 > 0 \rightarrow$

  $\rightarrow$ en $x = 2$ hay mínimo relativo.

b) $y' = \dfrac{3x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$.

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Según se ha deducido en el apartado *b)* del ejercicio anterior, son puntos de discontinuidad de la función y' los de abscisas −2 y 1. Por tanto, se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, determinados por los puntos que anulan y' y los puntos de discontinuidad de y':

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	+	+	−	+

La función presenta máximo relativo en $x = -1$, porque y' pasa de positiva a negativa; presenta mínimo relativo en $x = 1$, ya que y' pasa de negativa a positiva.

Se hallan las ordenadas de los extremos relativos calculando los valores de la función para los correspondientes valores de x:

- $y(-1) = \sqrt[3]{(-1)^3 - 3(-1) + 2} = \sqrt[3]{-1 + 3 + 2} = \sqrt[3]{4} \rightarrow$ máximo relativo en el punto $(-1, \sqrt[3]{4})$.
- $y(1) = \sqrt[3]{1^3 - 3 \cdot 1 + 2} = \sqrt[3]{1 - 3 + 2} = \sqrt[3]{0} \rightarrow$ mínimo relativo en el punto (1, 0).

Si se hace el estudio de la función y su representación gráfica, se observa que el mínimo relativo es un *punto de pico*.

c) $y' = 4(x - 1)^3 \cdot (x + 2)^3 + 3(x + 2)^2 \cdot (x - 1)^4$;

$y' = (x - 1)^3 \cdot (x + 2)^2 \cdot [4(x + 2) + 3(x - 1)] = (x - 1)^3 \cdot (x + 2)^2 \cdot (7x + 5)$.

$y' = 0 \rightarrow (x - 1)^3 \cdot (x + 2)^2 \cdot (7x + 5) = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -\dfrac{5}{7}$.

Son puntos críticos los de abscisas $-2, -\dfrac{5}{7}$ y 1.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $\left(-2, -\frac{5}{7}\right)$, $\left(-\frac{5}{7}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, determinados por los puntos críticos:

	$(x-1)^3$	$(x+2)^2$	$7x+5$	$y' = (x-1)^3 \cdot (x+2)^2 \cdot (7x+5)$
$(-\infty, -2)$	−	+	−	+
$\left(-2, -\frac{5}{7}\right)$	−	+	−	+
$\left(-\frac{5}{7}, 1\right)$	−	+	+	−
$(1, +\infty)$	+	+	+	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$, $\left(-2, -\frac{5}{7}\right)$ y $(1, +\infty)$ y es decreciente en el intervalo $\left(-\frac{5}{7}, 1\right)$.

La función presenta máximo relativo en $x = -\frac{5}{7}$, puesto que y' pasa de positiva a negativa; presenta mínimo relativo en $x = 1$, porque y' pasa de negativa a positiva.

Se hallan las ordenadas de los extremos relativos calculando los valores de la función para los valores correspondientes de x:

- $y\left(-\frac{5}{7}\right) = \left(-\frac{5}{7} - 1\right)^4 \cdot \left(-\frac{5}{7} + 2\right)^3 = \left(-\frac{12}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{7}\right)^3;$

  $y\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{15\,116\,544}{823\,543} \approx 18{,}36 \rightarrow$

  $\rightarrow$ máximo relativo en el punto $\left(-\frac{5}{7}, \frac{15\,116\,544}{823\,543}\right) \approx (-0{,}71; 18{,}36)$.

- $y(1) = (1-1)^4 \cdot (1+2)^3 = 0 \cdot 27 = 0 \rightarrow$ mínimo relativo en el punto $(1, 0)$.

d) $y' = (2n+1)(x-a)^{2n} \cdot (x-b)^{2n} + 2n(x-b)^{2n-1} \cdot (x-a)^{2n+1};$

$y' = (x-a)^{2n} \cdot (x-b)^{2n-1} \cdot [(2n+1)(x-b) + 2n(x-a)];$

$y' = (x-a)^{2n} \cdot (x-b)^{2n-1} \cdot (2nx + x - 2nb - b + 2nx - 2na);$

$y' = (x-a)^{2n} \cdot (x-b)^{2n-1} \cdot [(4n+1)x - (2na + 2nb + b)].$

$y' = 0 \rightarrow (x-a)^{2n} \cdot (x-b)^{2n-1} \cdot [(4n+1)x - (2na + 2nb + b)] = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = \frac{2n(a+b)+b}{4n+1}.$

Son puntos críticos los de abscisas a, b y x_3.

Considerando que n es un número natural, distinto de cero ($n \in N^*$), y suponiendo que a es distinto de b ($a \neq b$), se pueden presentar los dos casos que se estudian a continuación:

1) Que a sea mayor que b ($a > b$)

- Al sustituir b por a en x_3, se obtiene:

$$x_3 < \frac{2n(a + a) + a}{4n + 1} = \frac{2n \cdot 2a + a}{4n + 1} = \frac{4na + a}{4n + 1} = \frac{(4n + 1)a}{4n + 1} = a.$$

- Al sustituir a por b en x_3, resulta:

$$x_3 > \frac{2n(b + b) + b}{4n + 1} = \frac{2n \cdot 2b + b}{4n + 1} = \frac{4nb + b}{4n + 1} = \frac{(4n + 1)b}{4n + 1} = b.$$

Es decir, si $a > b$, se cumple que $b < x_3 < a$.

Por tanto, se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, b)$, (b, x_3), (x_3, a) y $(a, +\infty)$, determinados por los puntos críticos:

	$(x - a)^{2n}$	$(x - b)^{2n-1}$	$(4n + 1)x - [2n(a + b) + b]$	y'
$(-\infty, b)$	+	−	−	+
(b, x_3)	+	+	−	−
(x_3, a)	+	+	+	+
$(a, +\infty)$	+	+	+	+

La función presenta máximo relativo en $x = b$, porque y' pasa de positiva a negativa; presenta mínimo relativo en $x = x_3$, ya que y' pasa de negativa a positiva.

Se hallan las ordenadas de los extremos relativos calculando los valores de la función para los correspondientes valores de x:

- $y(b) = (b - a)^{2n+1} \cdot (b - b)^{2n} = (b - a)^{2n+1} \cdot 0^{2n} = 0 \rightarrow$
  $\rightarrow$ máximo relativo en el punto (b, 0).

- $y(x_3) = \left[\frac{2n(a + b) + b}{4n + 1} - a \right]^{2n+1} \cdot \left[\frac{2n(a + b) + b}{4n + 1} - b \right]^{2n} \rightarrow$

  $\rightarrow$ mínimo relativo en el punto $[x_3, y(x_3)]$.

2) Que a sea menor que b ($a < b$)

- Al sustituir b por a en x_3, resulta:

$$x_3 > \frac{2n(a + a) + a}{4n + 1} = \frac{2n \cdot 2a + a}{4n + 1} = \frac{4na + a}{4n + 1} = \frac{(4n + 1)a}{4n + 1} = a.$$

- Al sustituir a por b en x_3, se obtiene:

$$x_3 < \frac{2n(b + b) + b}{4n + 1} = \frac{2n \cdot 2b + b}{4n + 1} = \frac{4nb + b}{4n + 1} = \frac{(4n + 1)b}{4n + 1} = b.$$

Es decir,, si $a < b$, se cumple que $a < x_3 < b$.

Por tanto, se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, a)$, (a, x_3), (x_3, b) y $(b, +\infty)$, determinados por los puntos críticos:

	$(x-a)^{2n}$	$(x-b)^{2n-1}$	$(4n+1)x - [2n(a+b)+b]$	y'
$(-\infty, a)$	+	−	−	+
(a, x_3)	+	−	−	+
(x_3, b)	+	−	+	−
$(b, +\infty)$	+	+	+	+

La función presenta máximo relativo en $x = x_3$, ya que y' pasa de positiva a negativa; presenta mínimo relativo en $x = b$, porque y' pasa de negativa a positiva.

Se hallan las ordenadas de los extremos relativos calculando los valores de la función para los valores correspondientes de x:

- $y(x_3) = \left[\dfrac{2n(a+b)+b}{4n+1} - a\right]^{2n+1} \cdot \left[\dfrac{2n(a+b)+b}{4n+1} - b\right]^{2n} \rightarrow$

  $\rightarrow$ máximo relativo en el punto $[x_3, y(x_3)]$.

- $y(b) = (b-a)^{2n+1} \cdot (b-b)^{2n} = (b-a)^{2n+1} \cdot 0^{2n} = 0 \rightarrow$

  $\rightarrow$ mínimo relativo en el punto $(b, 0)$.

3. Hallar los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los intervalos que se indican:

a) $y = x^2 - 3x + 2$ en $[0, 2]$.

b) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ en $[1, 5]$ y en $[0, 4]$.

a) Se calcula el extremo relativo de la función:

$y' = 0 \rightarrow y' = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$, valor que pertenece al intervalo $[0, 2]$.

El valor del extremo relativo de la función es:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = \frac{17 - 18}{4} = -\frac{1}{4}.$$

En los extremos del intervalo $[0, 2]$ los valores de la función son:

$$y(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2; \qquad y(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Como la función es continua, en el intervalo $[0, 2]$ alcanza su máximo absoluto 2 en $x = 0$ y su mínimo absoluto $-\dfrac{1}{4}$ en $x = \dfrac{3}{2}$.

b) Se hallan los extremos relativos de la función:

$$y' = 0 \rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow$$

$\rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$, valores que pertenecen a los intervalos $[1, 5]$ y $[0, 4]$.

Los valores de los extremos relativos de la función son:

$y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 8 = 27 - 54 + 27 - 8 = -8;$

$y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 8 = 1 - 6 + 9 - 8 = -4.$

1) En los extremos del intervalo [1, 5] los valores de la función son:

$$y(1) = -4; \qquad y(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 - 8 = 125 - 150 + 45 - 8 = 12.$$

Como la función es continua, en el intervalo [1, 5] alcanza su máximo absoluto 12 en $x = 5$ y su mínimo absoluto -8 en $x = 3$.

2) En los extremos del intervalo [0, 4] los valores de la función son:

$$y(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 8 = -8;$$

$$y(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 8 = 64 - 96 + 36 - 8 = -4.$$

Como la función es continua, en el intervalo [0, 4] alcanza su máximo absoluto -4 en $x = 1$ y en $x = 4$ y su mínimo absoluto -8 en $x = 0$ y en $x = 3$.

4. Razonar si las siguientes funciones satisfacen el teorema de Rolle en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = 1 - |x|$ en $[-1, 1]$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

b) $f(x) = 2 + |x|$ en $[-2, 1]$.

c) $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$.

(Propuesto en la Univ. de León.)

Para que una función $y = f(x)$ satisfaga el teorema de Rolle en un intervalo [a, b] debe cumplir las tres condiciones siguientes:

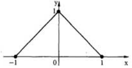
1) Ha de ser continua en el intervalo cerrado [a, b], perteneciente al dominio de definición de la función.

2) Debe ser derivable en el intervalo abierto (a, b).

3) Ha de tomar valores iguales en los extremos del intervalo; es decir, $f(a) = f(b)$.

Si la función $f(x)$ cumple las tres condiciones, el teorema de Rolle expresa que existe al menos un punto c, interior al intervalo (a, b), $c \in (a, b)$, en el que la derivada de la función en el punto c es nula, $f'(c) = 0$.

En cada caso se analiza si la respectiva función cumple las tres condiciones anteriores.



a) En la figura adjunta está representada, en el intervalo $[-1, 1]$, la función $f(x) = 1 - |x|$, que equivale a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, \text{ si } x < 0, \\ 1, \text{ si } x = 0, \\ 1 - x, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

1) La función $f(x)$ es continua en $x < 0$ y en $x > 0$; para determinar si lo es en $x = 0$ se hallan los límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 0^-} (1 + x) = 1.$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - x) = 1.$$

Como ambos límites son iguales, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

2) La función $f(x)$ es derivable en $x < 0 [f'(x) = 1]$ y en $x > 0 [f'(x) = -1]$; para determinar si es derivable en $x = 0$ se calculan las derivadas laterales de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

- Derivada por la izquierda: $f'(0)^- = 1.$
- Derivada por la derecha: $f'(0)^+ = -1.$

Al ser distintas ambas derivadas, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, la función $f(x)$ no es derivable en el intervalo abierto $(-1,1)$, ya que no es derivable en $x = 0$.

3) Los valores de la función $f(x)$ en los extremos del intervalo son:

$$f(-1) = 1 + (-1) = 0; \qquad f(1) = 1 - 1 = 0.$$

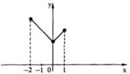
Así pues, la función $f(x)$ toma valores iguales en los extremos del intervalo, $f(-1) = f(1)$.

Como la función $f(x)$ no cumple la condición 2), no satisface el teorema de Rolle.

Nota: No es necesario averiguar si la función $f(x)$ cumple la condición 3), dado que no cumple la 2).

b) En la figura adjunta está representada, en el intervalo $[-2, 1]$, la función $f(x) = 2 + |x|$, que equivale a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ si } x < 0, \\ 2, \text{ si } x = 0, \\ 2 + x, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$



1) La función $f(x)$ es continua en $x < 0$ y en $x > 0$; para determinar si lo es en $x = 0$ se hallan los límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

- Límite por la izquierda: $\lim\limits_{x \to 0^-} (2 - x) = 2.$
- Límite por la derecha: $\lim\limits_{x \to 0^+} (2 + x) = 2.$

Al ser iguales ambos límites, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Es decir, la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-2, 1]$.

2) La función $f(x)$ es derivable en $x < 0 [f'(x) = -1]$ y en $x > 0 [f'(x) = 1]$; para determinar si es derivable en $x = 0$ se calculan las derivadas laterales de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

- Derivada por la izquierda: $f'(0)^- = -1.$
- Derivada por la derecha: $f'(0)^+ = 1.$

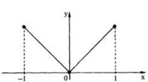
Como ambas derivadas son distintas, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Así pues, la función $f(x)$ no es derivable en el intervalo abierto $(-2, 1)$, porque no es derivable en $x = 0$.

La función $f(x)$ no satisface el teorema de Rolle, porque no cumple la condición 2).

Nota: Tampoco cumple la condición 3), ya que $f(-2) = 2 - (-2) = 4 \neq 2 + 1 = 3 = f(1)$.

c)



En la figura adjunta está representada, en el intervalo $[-1, 1]$, la función $f(x) = |x|$, que equivale a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ si } x < 0, \\ 0, \text{ si } x = 0, \\ x, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

1) La función $f(x)$ es continua en $x < 0$ y en $x > 0$; para determinar si lo es en $x = 0$ se hallan los límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

   • Límite por la izquierda:

   $$\lim_{x \to 0^-} (-x) = 0.$$

   • Límite por la derecha:

   $$\lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

   Como son iguales ambos límites, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

   Así pues, la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

2) La función $f(x)$ es derivable en $x < 0[f'(x) = -1]$ y en $x > 0[f'(x) = 1]$; para determinar si es derivable en $x = 0$ se calculan las derivadas laterales de $f(x)$ cuando x tiende a cero:

   • Derivada por la izquierda:

   $$f'(0)^- = -1.$$

   • Derivada por la derecha:

   $$f'(0)^+ = 1.$$

   Al no ser iguales ambas derivadas, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

   Por tanto, la función $f(x)$ no es derivable en el intervalo abierto $(-1, 1)$, ya que no es derivable en $x = 0$.

Como la función $f(x)$ no cumple la condición 2), no satisface el teorema de Rolle.

Nota: La función $f(x)$ sí cumple la condición 3), porque $f(-1) = -(-1) = 1 = f(1)$.

5. ¿Verifica la función $g(x) = 2x + \text{sen } x$ las condiciones del teorema de Lagrange? En caso afirmativo obtener el valor de θ.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

• Para que una función $y = f(x)$ verifique el teorema de Lagrange en un intervalo $[a, b]$ debe cumplir las dos condiciones siguientes:

1) Ha de ser continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, perteneciente al dominio de definición de la función.

2) Debe ser derivable en el intervalo abierto (a, b).

Si la función $f(x)$ cumple las dos condiciones, el teorema de Lagrange expresa que existe al menos un punto t, interior al intervalo (a, b), $t \in (a, b)$, en el que se verifica $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(t)$.

Se analiza si la función $g(x)$ cumple las dos condiciones anteriores.

1) La función $g(x) = 2x + \text{sen } x$ es continua en todo intervalo cerrado (finito) de R, ya que también son continuas en todo R las funciones $g_1(x) = 2x$ y $g_2(x) = \text{sen } x$.

2) La función $g(x) = 2x + \text{sen } x$ es derivable en todo punto $x \in R\,[g'(x) = 2 + \cos x]$; por tanto, es derivable en todo intervalo abierto (finito) de R.

Como la función $g(x)$ cumple las dos condiciones, verifica el teorema de Lagrange.

• Haciendo $b = a + h$, como $t \in (a, b)$, se tiene que $t = a + \theta g$ (para $0 < \theta < 1$) y la fórmula de Lagrange para la función $g(x)$ se escribe:

$$g(a + h) = g(a) + h \cdot g'(a + \theta h).$$

Sustituyendo $g(a + h)$, $g(a)$ y $g'(a + \theta h)$ en la fórmula anterior, se obtiene:

$$2(a + h) + \operatorname{sen}(a + h) = 2a + \operatorname{sen} a + h \cdot [2 + \cos(a + \theta h)].$$

Simplificando, queda:

$$\operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a + h \cdot \cos(a + \theta h).$$

Despejando $\cos(a + \theta h)$ y, después, $a + \theta h$, resulta:

$$\cos(a + \theta h) = \frac{\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a}{h} \rightarrow a + \theta h = \arccos \frac{\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a}{h}.$$

Despejando el coeficiente θ, se deduce:

$$\theta = \frac{1}{h} \cdot \left[\arccos \frac{\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen} a}{h} - a \right].$$

6. ¿Satisfacen las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ las condiciones del teorema de Cauchy en el intervalo $[-1, 1]$? En caso afirmativo hallar el valor de t.

• Para que dos funciones $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$ satisfagan el teorema de Cauchy en un intervalo $[a, b]$ deben cumplir las cuatro condiciones siguientes:

1) Ambas han de ser continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, perteneciente a sus respectivos dominios de definición.

2) Las dos deben ser derivables en el intervalo abierto (a, b).

3) Las derivadas de ambas no han de anularse simultáneamente en ningún punto del intervalo (a, b).

4) Los valores de la función $y_2 = g(x)$ en los extremos del intervalo no han de ser iguales; es decir, $g(a) \neq g(b)$.

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones anteriores, el teorema de Cauchy expresa que existe al menos un punto t, interior al intervalo (a, b), $t \in (a, b)$, en el que se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Se analiza si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones anteriores.

1) Como son funciones polinómicas, $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $[-1, 1]$.

2) Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables $[f'(x) = 2x - 2$ y $g'(x) = 3x^2 - 14x + 20]$ en el intervalo $(-1, 1)$.

3) Los puntos que anulan las derivadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1;$$

$$g'(x) = 3x^2 - 14x + 20 = 0 \rightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 240}}{6} \text{ (raíces imaginarias).}$$

Por tanto, las derivadas de ambas funciones no se anulan simultáneamente en el intervalo $(-1, 1)$. (En realidad no se anulan en dicho intervalo.)

4) Los valores de la función $g(x)$ en los extremos del intervalo son:

$$g(-1) = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 20(-1) - 5 = -33; \quad g(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 - 5 = 9.$$

Es decir, los valores de la función $g(x)$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ son distintos, $g(-1) = -33 \neq 9 = g(1)$.

Como las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones, satisfacen el teorema de Cauchy.

- Existe al menos un punto $t \in (-1, 1)$ en el que se verifica $\dfrac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$.

Sustituyendo $f(1) = 2$, $f(-1) = 6$, $g(1) = 9$ y $g(-1) = -33$, resulta:

$$\frac{2-6}{9+33} = \frac{2t-2}{3t^2-14t+20} \rightarrow -4(3t^2 - 14t + 20) = 42(2t-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow 3t^2 + 7 - 1 = 0 \rightarrow t = \frac{-7 \pm \sqrt{49+12}}{6} \rightarrow t_1 = \frac{-7+\sqrt{61}}{6},\ t_2 = \frac{-7-\sqrt{61}}{6}.$$

De las dos raíces ($t_1 \approx 0{,}135$ y $t_2 \approx -2{,}468$) sólo la t_1 pertenece al intervalo $(-1, 1)$; por tanto, éste es el valor de t pedido.

7. Si $x > 0$, demostrar que:

$$e^x > \frac{1}{1+x}; \qquad e^x > 1 + \ln(1+x); \qquad e^x > 1 + (1+x)\cdot\ln(1+x).$$

Basándose en las desigualdades anteriores probar que:

$$e^{n(n+1)/2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

1) Se considera la función $f(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x}$, cuya derivada es $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Como la función es continua en el intervalo cerrado $[0, x]$ y derivable en el intervalo abierto $(0, x)$, se le aplica el teorema de Lagrange en el intervalo $[0, x]$. Teniendo en cuenta que $a = 0$, $b = x$, $h = x$ y $f(0) = 0$, resulta:

$$e^x - \frac{1}{1+x} = x \cdot \left[e^{\theta x} + \frac{1}{(1+\theta x)^2}\right].$$

La expresión del segundo miembro de la igualdad es positiva, porque los dos factores son positivos, lo que indica que en el primer miembro de la igualdad el minuendo es mayor que el sustraendo. Es decir:

$$e^x > \frac{1}{1+x}.$$

2) Se considera la función $g(x) = e^x - [1 + \ln(1+x)]$, cuya derivada es $g'(x) = e^x - \dfrac{1}{1+x}$.

Al ser función continua en el intervalo cerrado $[0, x]$ y derivable en el intervalo abierto $(0, x)$, se le aplica el teorema de Lagrange en el intervalo $[0, x]$. Teniendo presente que $a = 0$, $b = x$, $h = x$ y $g(0) = 0$, se obtiene:

$$e^x - [1 + \ln(1+x)] = x \cdot \left(e^{\theta x} - \frac{1}{1+\theta x}\right).$$

En el apartado 1) se ha demostrado que $e^x - \dfrac{1}{1+x}$ es positivo para $x > 0$; por tanto, el segundo factor de la expresión del segundo miembro de la igualdad es positivo, ya que $\theta x > 0$. Se deduce, pues, que el segundo miembro de la igualdad es positivo, lo que indica que en el primer miembro de la igualdad el minuendo es mayor que el sustraendo. Es decir:

$$e^x > 1 + \ln(1+x).$$

3) Se considera la función $m(x) = e^x - [1 + (1 + x) \cdot \ln(1 + x)]$, cuya derivada es

$$m'(x) = e^x - \left[\ln(1 + x) + (1 + x) \cdot \frac{1}{1 + x}\right] = e^x - [1 + \ln(1 + x)].$$

Como la función es continua en el intervalo cerrado $[0, x]$ y derivable en el intervalo abierto $(0, x)$, se le aplica el teorema de Lagrange en el intervalo $[0, x]$. Teniendo en cuenta que $a = 0$, $b = x$, $h = x$ y $m(0) = 0$, resulta:

$$e^x - [1 + (1 + x) \cdot \ln(1 + x)] = x \cdot (e^{\theta x} - [1 + \ln(1 + \theta x)]).$$

En el apartado 2) se ha demostrado que $e^x - [1 + \ln(1 + x)]$ es positivo para $x > 0$; por tanto, el segundo factor de la expresión del segundo miembro de la igualdad es positivo, ya que $\theta x > 0$. Por consiguiente, el segundo miembro de la igualdad es positivo, lo que indica que en el primer miembro de la igualdad el minuendo es mayor que el sustraendo. Es decir:

$$e^x > 1 + (1 + x) \cdot \ln(1 + x).$$

4) Se ha demostrado en el apartado 1) que $e^x > \dfrac{1}{1 + x}$ si $x > 0$. Sustituyendo sucesivamente en dicha desigualdad x por 1, 2, ..., n − 1, n (todos ellos valores mayores que cero), se obtienen las desigualdades siguientes:

$$e^1 > \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2};\ e^2 > \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3};\ \dots;\ e^{n-1} > \frac{1}{1 + (n - 1)} = \frac{1}{n};\ e^n > \frac{1}{1 + n}.$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades anteriores, resulta:

$$e^1 + e^2 + \dots + e^{n-1} + e^n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1}.$$

Ahora bien, como $e > 1$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$e^1 \cdot e^2 \cdot \dots \cdot e^{n-1} \cdot e^n > e^1 + e^2 + \dots + e^{n-1} + e^n \rightarrow$$

$$\rightarrow e^{1+2+\dots+(n-1)+n} > e^1 + e^2 + \dots + e^{n-1} + e^n.$$

Por tanto, se deduce que:

$$e^{1+2+\dots+(n-1)+n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1}.$$

El exponente de la potencia del primer miembro de la última desigualdad es la suma de los términos de una progresión aritmética de diferencia (o razón) la unidad; por tanto:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{1 + n}{2} \cdot n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Finalmente, se obtiene:

$$e^{n(n+1)/2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Nota: Recuérdese que la suma de los términos de una progresión aritmética limitada es igual a la semisuma de los términos extremos (primero y último) multiplicada por el número de términos.

8. Comprobar que la ecuación $2x^2 = x(\text{sen}\,x + \cos x) + \cos x - \text{sen}\,x$ tiene sólo dos raíces.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Si se considera la función $f(x) = 2x^2 - x(\text{sen}\,x + \cos x) - \cos x + \text{sen}\,x$, la ecuación propuesta equivale a $f(x) = 0$.

La derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = 4x - (\text{sen}\,x + \cos x) - x(\cos x - \text{sen}\,x) + \text{sen}\,x + \cos x = x[4 - (\cos x - \text{sen}\,x)].$$

Ahora bien, como $|\cos x - \text{sen } x| \leq |\cos x| + |\text{sen } x| \leq 1 + 1 = 2$, $4 - (\cos x - \text{sen } x)$ es positivo y la derivada $f'(x)$ se anula sólo en $x = 0$.

Por tanto, al existir un único punto $c = 0$ en el que se anula la derivada $f'(x)$, la ecuación propuesta posee a lo más dos raíces reales.

En efecto, como la función $f(x)$ es continua y derivable en toda la recta real, si la ecuación $f(x) = 0$ tuviese tres raíces diferentes a_1, a_2 y a_3, tales que $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$, la función derivada $f'(x)$ se anularía al menos en dos puntos c_1 y c_2 tales que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$, $c_1 \in (a_1, a_2)$ y $c_2 \in (a_2, a_3)$ en virtud del teorema de Rolle.

Como por otro lado se tiene que $f(-1) = 2(1 - \text{sen } 1) > 0$, $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 2(1 - \cos 1) > 0$, aplicando el teorema de Bolzano resulta que la función $f(x)$ se anula al menos en dos valores.

Por consiguiente, de las dos conclusiones anteriores se deduce que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos raíces.

Calcular los siguientes límites:

9. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$.

Es una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$; aplicando la regla de l'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 5}{3x^2} = \frac{2 \cdot 2 - 5}{3 \cdot 2^2} = -\frac{1}{12}.$$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$.

Es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$; aplicando la regla de l'Hôpital, resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx} = \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot \cos ax}{b \cdot \cos bx} = \frac{a \cdot \cos 0}{b \cdot \cos 0} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \text{tg } x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Se trata de una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$; aplicando la regla de l'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{tg } x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{0 - (1 + \text{tg}^2 x)}{1 - 0} = -\left(1 + \text{tg}^2 \frac{\pi}{4}\right) = -(1 + 1^2) = -2.$$

12. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

Es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$; aplicando la regla de l'Hôpital, se deduce:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\text{sen } x}{1 - 0} = -\text{sen } \frac{\pi}{2} = -1.$$

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 4x}{x\sqrt{x^2 - 4x}}$.

Se trata de una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$; dividiendo el numerador y el denominador por x^3, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4x}{x\sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^3 - 4x}{x^3}}{\sqrt{\dfrac{x^4 - 4x^3}{x^6}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}}} = \frac{1}{0} \to \infty.$$

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{4x^2 - 7x + 1}}{\sqrt[3]{1 - 8x - x^3}}$.

Es una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; dividiendo el numerador y el denominador por x, se deduce:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{4x^2 - 7x + 1}}{\sqrt[3]{1 - 8x - x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\dfrac{4x^2 - 7x + 1}{x^3}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1 - 8x - x^3}{x^3}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{\dfrac{4}{x} - \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{8}{x^2} - 1}} = \frac{0}{-1} = 0.$$

15. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 4x - 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1})$.

Se trata de una indeterminación de la forma $\infty - \infty$; multiplicando y dividiendo la expresión por su conjugada, se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x - 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1})(\sqrt{x^2 + 4x - 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1})}{\sqrt{x^2 + 4x - 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 4x - 1) - (x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x^2 + 4x - 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 4x - 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}}.$$

Resulta una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; dividiendo el numerador y el denominador por x, se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{6x}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2 + 4x - 1}{x^2}} + \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{6}{1 + 1} = 3.$$

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} - x\right)$.

Es una indeterminación de la forma $\infty - \infty$; multiplicando y dividiendo la expresión por la que hace que el producto del numerador de la fracción que resulta sea la diferencia de los cubos de los dos términos de la expresión dada, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} - x\right)\left[\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} + x^2\right]}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^3 - 3x^2 + 1) + x\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} + x^2\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1}}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} + x^2} -$$

$$- \frac{x\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} + x^2\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} + x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 1} + x^2}.$$

Resulta una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; dividiendo el numerador y el denominador por x^2, se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{-3x^2 + 1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\dfrac{x^6 - 3x^5 + x^3}{x^6}} + \dfrac{x^2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3 + \dfrac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}} + 1} = \frac{-3}{1 + 1 + 1} = -1.$$

Nota: Para hallar la diferencia de los cubos se ha utilizado la igualdad $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

17. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Si x tiende a $\dfrac{\pi}{2}$ por la izquierda $\left(x \to \dfrac{\pi}{2}^-\right)$, la función no está definida por no estarlo el $\ln\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$; si x tiende a $\dfrac{\pi}{2}$ por la derecha $\left(x \to \dfrac{\pi}{2}^+\right)$, la función sí está definida, pues lo está el $\ln\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Se calcula, por tanto, el límite cuando x tiende a $\dfrac{\pi}{2}^+$.

Se trata en este caso de una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y haciendo las operaciones, se obtiene:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{x - \dfrac{\pi}{2}}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{x - \dfrac{\pi}{2}}{\cos^2 x}.$$

Resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$; aplicando de nuevo la regla de l'Hôpital, se deduce:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{-2 \cos x \operatorname{sen} x} = \frac{1}{0} \to \infty.$$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$.

Si x tiende a cero por la izquierda ($x \to 0^-$), la función no está definida, pues no lo está el ln x; si x tiende a cero por la derecha ($x \to 0^+$), la función sí está definida por estarlo el ln x. Se halla, por consiguiente, el límite cuando x tiende a 0^+.

En este caso es una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y efectuando las operaciones, se tiene:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x}.$$

Resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$; aplicando de nuevo la regla de l'Hôpital, se deduce:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cos x}{1} = \frac{-2 \cdot 0 \cdot 1}{1} = \frac{-0}{1} = 0.$$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} (x \cdot e^{-x})$.

Es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$, que se transforma en otra del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ escribiendo e^{-x} en la forma $\frac{1}{e^x}$; aplicando, pues, la regla de l'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} (x \cdot e^{-x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} \to \frac{1}{\infty} = 0.$$

20. $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 \cdot e^{1/x})$.

Se trata de una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$, que se transforma en otra del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ escribiendo x^3 en la forma $\frac{1}{x^{-3}}$; aplicando sucesivamente la regla de l'Hôpital, operando y simplificando cada vez que se aplica dicha regla, resulta:

$$\lim_{x \to 0} (x^3 \cdot e^{1/x}) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{x^{-3}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}(-x^{-2})}{-3x^{-4}} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{x^{-2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}(-x^{-2})}{-2x^{-3}} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{x^{-1}} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}(-x^{-2})}{-x^{-2}} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} e^{1/x} = \frac{1}{6} \cdot e^{1/0} \to \infty.$$

21. $\lim\limits_{x \to 0} (x^3 \cdot \ln x)$.

Si x tiende a cero por la izquierda ($x \to 0^-$), la función no está definida por no estarlo el ln x; si x tiende a cero por la derecha ($x \to 0^+$), la función sí está definida, pues lo está el ln x. Se calcula, por tanto, el límite cuando x tiende a 0^+.

En este caso es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$, que se transforma en otra del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ escribiendo x^3 en la forma $\dfrac{1}{x^{-3}}$; aplicando, pues, la regla de l'Hôpital y simplificando, se obtiene:

$$\lim_{x \to 0^+} (x^3 \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{-3x^{-4}} = -\frac{1}{3} \lim_{x \to 0^+} x^3 = -\frac{1}{3} \cdot 0 = 0.$$

22. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$.

Se trata de una indeterminación de la forma 1^∞, la misma indeterminación que aparece en el límite que define el número e.

Si $A = \lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$ es el límite propuesto, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, resulta:

$$\ln A = \ln \left[\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\ln (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln (1 + \operatorname{sen} x) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + \operatorname{sen} x)}{x}.$$

Es una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$; aplicando la regla de l'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1 + \operatorname{sen} x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x} = e^{\ln A} = e^1 = e$.

Nota: Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (lo que implica que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = \lim\limits_{x \to 0} x$; es decir, que el seno y el arco, cuando el arco tiende a cero, son infinitésimos equivalentes), se puede sustituir en el límite propuesto en este ejercicio sen x por x, obteniéndose $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$, que define precisamente el número e.

23. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} \right)^{x - 1}$.

Se trata de una indeterminación de la forma ∞^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} \right)^{x - 1}$ es el límite que se busca, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se obtiene:

$$\ln A = \ln\left[\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right] = \lim_{x \to 1} \ln\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1}\left[(x-1)\cdot \ln\frac{1}{x-1}\right] = \lim_{x \to 1}\frac{-\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}}.$$

Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y operando, resulta:

$$\ln A = \lim_{x \to 1}\frac{-\ln(x-1)}{(x-1)^{-1}} = \lim_{x \to 1}\frac{-\frac{1}{x-1}}{-(x-1)^{-2}} = \lim_{x \to 1}(x-1) = 1 - 1 = 0.$$

Es decir, $\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1} = e^{\ln A} = e^0 = 1.$

24. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x}$.

Se trata de una indeterminación de la forma ∞^0.

Si $A = \lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \to \infty} x^{1/x}$ es el límite pedido, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se tiene:

$$\ln A = \ln(\lim_{x \to \infty} x^{1/x}) = \lim_{x \to \infty}(\ln x^{1/x}) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right) = \lim_{x \to \infty}\frac{\ln x}{x}.$$

Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital, resulta:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty}\frac{x^{-1}}{1} = \lim_{x \to \infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Por tanto, $\lim_{x \to \infty}\sqrt[x]{x} = e^{\ln A} = e^0 = 1.$

25. $\lim_{x \to 0} x^x$.

Se trata de una indeterminación de la forma 0^0.

Si $A = \lim_{x \to 0} x^x$ es el límite que se busca, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se obtiene:

$$\ln A = \ln(\lim_{x \to 0} x^x) = \lim_{x \to 0}(\ln x^x) = \lim_{x \to 0}(x \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}}.$$

Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y efectuando las operaciones, se deduce:

$$\ln A = \lim_{x \to 0}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0}(-x) = 0.$$

Así pues, $\lim_{x \to 0} x^x = e^{\ln A} = e^0 = 1.$

26. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$.

Este límite está calculado en el ejercicio **6** de los **ejercicios resueltos** de este mismo tema y en el ejercicio **24** resuelto anteriormente.

27. $\lim\limits_{x \to 0} (\text{sen } x)^{\text{tg } x}$.

Es una indeterminación de la forma 0^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to 0} (\text{sen } x)^{\text{tg } x}$ es el límite pedido, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, resulta:

$$\ln A = \ln [\lim_{x \to 0} (\text{sen } x)^{\text{tg } x}] = \lim_{x \to 0} [\ln (\text{sen } x)^{\text{tg } x}] =$$

$$= \lim_{x \to 0} [\text{tg } x \cdot \ln (\text{sen } x)] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (\text{sen } x)}{\dfrac{1}{\text{tg } x}}.$$

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y haciendo las operaciones, se tiene:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (\text{sen } x)}{\dfrac{1}{\text{tg } x}} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\cos x}{\text{sen } x} : \left(- \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\text{tg}^2 x} \right) \right] = - \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot \text{tg}^2 x \cdot \cos^2 x}{\text{sen } x};$$

$$\ln A = - \lim_{x \to 0} \frac{\cos x \cdot \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x}{\text{sen } x} = - \lim_{x \to 0} (\cos x \cdot \text{sen } x) = -1 \cdot 0 = 0.$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to 0} (\text{sen } x)^{\text{tg } x} = e^{\ln A} = e^0 = 1$.

28. $\lim\limits_{x \to 1} [\ln (2 - x)]^{x-1}$.

Es una indeterminación de la forma 0^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to 1} [\ln (2 - x)]^{x-1}$ es el límite buscado, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se tiene:

$$\ln A = \ln (\lim_{x \to 1} [\ln (2 - x)]^{x-1}) = \lim_{x \to 1} (\ln [\ln (2 - x)]^{x-1}) =$$

$$= \lim_{x \to 1} ((x - 1) \cdot \ln [\ln (2 - x)]) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln [\ln (2 - x)]}{(x - 1)^{-1}}.$$

Resulta una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y operando, se deduce:

$$\ln A = \lim_{x \to 1} \left(\frac{-1}{(2 - x) \cdot \ln (2 - x)} : [-(x - 1)^{-2}] \right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2}{(2 - x) \cdot \ln (2 - x)}.$$

Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$; aplicando de nuevo la regla de l'Hôpital y efectuando operaciones, se obtiene:

$$\ln A = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{(-1) \cdot \ln(2-x) + (2-x)\left(\frac{-1}{2-x}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{-\ln(2-x) - 1} = \frac{2 \cdot 0}{-0-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} [\ln(2-x)]^{x-1} = e^{\ln A} = e^0 = 1.$

29. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}\right)^x.$

Como $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞.

Si $A = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}\right)^x$ es el límite pedido, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se tiene:

$$\ln A = \ln\left[\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}\right)^x\right] = \lim_{x \to \infty} \left[\ln\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}\right)^x\right];$$

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \left(x \cdot \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}}{\frac{1}{x}}.$$

Resulta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, puesto que el numerador tiende a $\ln 1 = 0$; aplicando la regla de l'Hôpital y efectuando las operaciones, se obtiene:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{(2x-2)(x^2-4) - 2x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2-4)^2} : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 - 10x + 8}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4)}}{-\frac{1}{x^2}};$$

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{-(2x^2 - 10x + 8)x^2}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 4)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^4 + 10x^3 - 8x^2}{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}.$$

Es otra indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se resuelve dividiendo el numerador y el denominador por x^4. Se deduce así que $\ln A = -2$.

Así pues, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}\right)^x = e^{\ln A} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$

Nota: Para calcular límites indeterminados de la forma 1^∞ se utiliza el proceso que se expone a continuación.

Si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n \to \infty} b_n \to \infty$, se trata de hallar $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)^{b_n}$, indeterminación del tipo 1^∞.

Que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ indica que $a_n \approx 1 + \frac{1}{n}$, siendo lógicamente $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. Por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{b_n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{b_n} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\left(\frac{1}{n}\right) \cdot b_n}.$$

Al ser $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n)^{b_n} = (\lim\limits_{n \to \infty} a_n)^{\lim\limits_{n \to \infty} b_n}$, si la igualdad no da origen a indeterminaciones de las formas ∞^0, 0^0 y 1^∞, cosa que no sucede en el límite que se estudia, ya que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, y como $\frac{1}{n} \approx a_n - 1$, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n)^{b_n} = \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot b_n\right)} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} [(a_n - 1) \cdot b_n]}.$$

Aplicando este resultado al límite anterior, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}\right)^x = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4} - 1\right)x} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x^2 + 5x}{x^2 - 4}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

(El exponente de la potencia es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se resuelve dividiendo el numerador y el denominador por x^2.)

30. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^{\frac{x+3}{4}}$

Al ser $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x + 2}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$, se trata de una indeterminación de la forma 1^∞; aplicando el resultado obtenido en la nota del ejercicio anterior, se deduce:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^{\frac{x+3}{4}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} - 1\right)\frac{x+3}{4}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x + 9}{4x - 4}} = e^{3/4} = \sqrt[4]{e^3}.$$

31. $\lim\limits_{x \to \infty} [x \cdot (\sqrt[x]{a} - 1)]$.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} [x \cdot (\sqrt[x]{a} - 1)] = \lim\limits_{x \to \infty} [x \cdot (a^{1/x} - 1)]$, es una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$ (siempre que $a \neq 0$), que se transforma en otra del tipo $\frac{0}{0}$ escribiendo x en la forma $\frac{1}{x^{-1}}$; aplicando la regla de l'Hôpital y haciendo las operaciones, se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} [x \cdot (a^{1/x} - 1)] = \lim_{x \to \infty} \frac{a^{1/x} - 1}{x^{-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a^{1/x} - \ln a \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}} = \lim_{x \to \infty} (a^{1/x} \cdot \ln a) = \ln a.$$

El resultado exige que a sea positivo, $a > 0$; por tanto, se cumple que $a \neq 0$ y que la indeterminación es de la forma $\infty \cdot 0$.

32. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^x - 1}{x}$.

Al ser a^x una función exponencial, a es un número positivo, distinto de cero y de 1, $a > 0$ y $a \neq 1$. Se consideran, pues, los dos posibles límites:

1) Límite si a está comprendido entre cero y 1, $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{0 - 1}{\infty} = 0.$$

2) Límite si a es mayor que 1, $a > 1$:

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{a^x \cdot \ln a}{1} = \lim_{x \to \infty} (a^x \cdot \ln a) \to \infty.$$

33. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$, $(a > 1, b > 1)$.

Es una indeterminación de la forma 1^∞.

Se realiza el cambio $x = \dfrac{1}{n} \rightarrow n = \dfrac{1}{x}$; al tender x a cero n tiende a infinito y se puede escribir:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n.$$

Aplicando el resultado obtenido en la nota del ejercicio **29**, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} - 1 \right) n} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} - 2}{2} \cdot n \right)}.$$

El exponente de la potencia es una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$, que se transforma en otra del tipo $\dfrac{0}{0}$ escribiendo n en la forma $\dfrac{1}{n^{-1}}$; aplicando la regla de l'Hôpital para hallar el límite del exponente y operando, se deduce:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n} - 2}{2} \cdot n \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{1/n} + b^{1/n} - 2}{2n^{-1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^{1/n} \cdot \ln a \cdot (-n^{-2}) + b^{1/n} \cdot \ln b \cdot (-n^{-2})}{2(-n^{-2})} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^{1/n} \cdot \ln a + b^{1/n} \cdot \ln b}{2} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \frac{\ln (a \cdot b)}{2} = \ln \sqrt{a \cdot b}.$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = e^{\ln \sqrt{a \cdot b}} = \sqrt{a \cdot b}$.

34. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$, $(a > 1, b > 1)$.

Se trata de una indeterminación de la forma ∞^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ es el límite propuesto, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se obtiene:

$$\ln A = \ln \left[\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{a^x + b^x}{2} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln (a^x + b^x) - \ln 2}{x}.$$

Es una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital, resulta:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b}{a^x + b^x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b}{a^x + b^x}.$$

Se llega a una nueva indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, que no se puede resolver por la regla de l'Hôpital, ya que aplicándola sucesivamente se obtienen siempre indeterminaciones del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. (Se invita al lector a que compruebe la afirmación anterior.)

Se resuelve, pues, la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por la función exponencial (a^x o b^x) que tenga mayor valor.

Ahora bien, como $a > 1$ y $b > 1$, se pueden considerar los tres casos siguientes:

1) Si $a = b$, dividiendo el numerador y el denominador por a^x (o por b^x), se tiene:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b}{a^x + b^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{a^x \cdot \ln a + a^x \cdot \ln a}{a^x + a^x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2a^x \cdot \ln a}{2a^x} = \ln a \ (= \ln b).$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = e^{\ln A} = e^{\ln a} = a (= e^{\ln b} = b)$, cuando $a = b$.

2) Si $a > b$, dividiendo el numerador y el denominador por a^x, al ser $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{b^x}{a^x} = 0$, se deduce:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b}{a^x + b^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b}{a^x}}{\dfrac{a^x + b^x}{a^x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln a + \dfrac{b^x}{a^x} \cdot \ln b}{1 + \dfrac{b^x}{a^x}} = \ln a.$$

Así pues, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = e^{\ln A} = e^{\ln a} = a$, cuando $a > b$.

3) Si $a < b$, dividiendo el numerador y el denominador por b^x, al ser $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^x}{b^x} = 0$, se obtiene:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b}{a^x + b^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{a^x \cdot \ln a + b^x \cdot \ln b}{b^x}}{\dfrac{a^x + b^x}{b^x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{a^x}{b^x} \cdot \ln a + \ln b}{\dfrac{a^x}{b^x} + 1} = \ln b.$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = e^{\ln A} = e^{\ln b} = b$, cuando $a < b$.

Se pueden obtener los tres límites anteriores de una manera más directa operando como se hace a continuación.

1) Si $a = b$, el valor del límite es:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x + a^x}{2} \right)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} (a^x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} a^{x/x} = \lim_{x \to \infty} a = a (= b).$$

2) Si $a > b$, al ser $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{b^x}{a^x} = 0$, el valor del límite es:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{a^x}{2} \cdot \left(1 + \frac{b^x}{a^x} \right) \right]^{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{a^x}{2} \right)^{1/x} \cdot \left(1 + \frac{b^x}{a^x} \right)^{1/x} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{a^{x/x}}{2^{1/x}} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{b^x}{a^x} \right)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a}{2^{1/x}} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{b^x}{a^x} \right)^{1/x} = \frac{a}{2^0} \cdot 1^0 = a.$$

3) Si $a < b$, al ser $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a^x}{b^x} = 0$, el valor del límite es:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{b^x}{2} \cdot \left(\frac{a^x}{b^x} + 1 \right) \right]^{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{b^x}{2} \right)^{1/x} \cdot \left(\frac{a^x}{b^x} + 1 \right)^{1/x} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{b^{x/x}}{2^{1/x}} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x}{b^x} + 1 \right)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{b}{2^{1/x}} \cdot \lim_{x \to \infty} \left(\frac{a^x}{b^x} + 1 \right)^{1/x} = \frac{b}{2^0} \cdot 1^0 = b.$$

35. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x) \cdot \operatorname{sen} x}{x^2}$.

(Propuesto en la Univ. de Santander.)

Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$; aplicando sucesivamente la regla de l'Hôpital, operando cada vez que se aplica dicha regla, resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x + (1 - \cos x) \cdot \cos x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos x - \cos^2 x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x - 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

36. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{sen} x - x}$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Se trata de una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$; aplicando la regla de l'Hôpital y haciendo las operaciones, se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{sen} x - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (\cos x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{-\cos^2 x (1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{-\cos^2 x} = \frac{1 + 1}{-1} = -2.$$

37. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$; aplicando sucesivamente la regla de l'Hôpital, se deduce:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^2 x + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen} x}{6x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos^3 x + e^{\operatorname{sen} x} \cdot 2\cos x \cdot \operatorname{sen} x + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x + e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{6} =$$

$$= \frac{1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{6} = \frac{1 - 1 + 1}{6} = \frac{1}{6}.$$

38. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{1/\cos x}$.

(Propuesto en la Univ. Politéc. de Madrid.)

Se trata de una indeterminación de la forma 1^∞.

Se efectúa el cambio $x - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{n} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} = \frac{n\pi + 2}{2n}$; al tender $x - \frac{\pi}{2}$ a cero n tiende a infinito y se puede escribir:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)^{1/\cos x} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + 2\cos \frac{n\pi + 2}{2n}\right)^{1/\cos \frac{n\pi+2}{2n}}.$$

Aplicando el resultado obtenido en la nota del ejercicio **29**, resulta:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + 2\cos \frac{n\pi + 2}{2n}\right)^{1/\cos \frac{n\pi+2}{2n}} = e^{\lim\limits_{n \to \infty}\left[\left(1 + 2\cos\frac{n\pi+2}{2n} - 1\right)\frac{1}{\cos\frac{n\pi+2}{2n}}\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2\cos\frac{n\pi+2}{2n}}{\cos\frac{n\pi+2}{2n}}} = e^{\lim\limits_{n \to \infty} 2} = e^2.$$

39. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 3)^{1/x}$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Es una indeterminación del tipo ∞^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 3)^{1/x}$ es el límite que se busca, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se obtiene:

$$\ln A = \ln [\lim_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 3)^{1/x}] = \lim_{x \to \infty} [\ln(x^3 - 2x + 3)^{1/x}];$$

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(x^3 - 2x + 3)\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^3 - 2x + 3)}{x}.$$

Resulta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital, se deduce:

$$\ln A = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^3 - 2x + 3)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 3}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 3}.$$

Es otra indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se resuelve dividiendo el numerador y el denominador por x^2 (o por x^3). Se tiene así que $\ln A = 0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 2x + 3)^{1/x} = e^{\ln A} = e^0 = 1$.

40. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln(1 + x)}{1 - \cos x}$.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$; aplicando la regla de l'Hôpital, resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln(1 + x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) + x \cdot \frac{1}{1 + x}}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

41. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)$.

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)

Si x tiende a cero por la izquierda ($x \to 0^-$), la función no está definida por no estarlo el ln x; si x tiende a cero por la derecha ($x \to 0^+$), la función sí está definida porque lo está el ln x. Se calcula, pues, el límite cuando x tiende a 0^+.

Es en tal caso una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$, que se transforma en otra del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ escribiendo tg x en la forma $\frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{-1}}$; aplicando la regla de l'Hôpital y efectuando las operaciones, se obtiene:

$$\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{(\operatorname{tg} x)^{-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\operatorname{tg} x)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x}.$$

Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$; aplicando de nuevo la regla de l'Hôpital, se deduce:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2\operatorname{sen} x \cos x}{1} = \frac{-2 \cdot 0 \cdot 1}{1} = \frac{-0}{1} = 0.$$

Nota: Obsérvese que este límite es el mismo que el del ejercicio **18**, ya que $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$.

42. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Se trata de una indeterminación del tipo 0^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x$ es el límite pedido, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se obtiene:

$$\ln A = \ln [\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x] = \lim_{x \to 0} [\ln (\operatorname{sen} x)^x] = \lim_{x \to 0} (x \cdot \ln \operatorname{sen} x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{x^{-1}}.$$

Resulta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando sucesivamente la regla de l'Hôpital y operando, se tiene:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x = e^{\ln A} = e^0 = 1.$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)

Es una indeterminación del tipo ∞^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$ es el límite propuesto, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se deduce:

$$\ln A = \ln \left[\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\ln \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\operatorname{tg} x \cdot \ln \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \ln x}{(\operatorname{tg} x)^{-1}}.$$

Resulta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y efectuando las operaciones, se obtiene:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \frac{-2x^{-1}}{-(\operatorname{tg} x)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x^{-1}}{-\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{x}.$$

Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$; aplicando por segunda vez la regla de l'Hôpital, se tiene:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \frac{4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{1} = \frac{4 \cdot 0 \cdot 1}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Así pues, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x} = e^{\ln A} = e^0 = 1.$

44. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$.

(Propuesto en la Univ. de Málaga.)

Se trata de una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; sin embargo, no se puede aplicar la regla de l'Hôpital, porque sen x y cos x no están definidos (no tienen límite) cuando x tiende a infinito y, por tanto, no existe el límite del cociente de las derivadas cuando x tiende a infinito.

Ahora bien, como sen x y cos x sí están acotados (entre +1 y −1), $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\cos x}{e^x} = 0$ y, por consiguiente, dividiendo el numerador y el denominador por e^x, resulta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x}}{\frac{e^x + \cos x}{e^x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}{1 + \frac{\cos x}{e^x}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

45. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{\ln x} - \dfrac{1}{x \cdot \ln x} \right).$

Es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, que se transforma en otra de la forma $\dfrac{0}{0}$ efectuando la sustracción; aplicando la regla de l'Hôpital y operando, se deduce:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x \cdot \ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x \cdot \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{\ln x + x \cdot x^{-1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x}{\ln x + 1} = \frac{2}{0 + 1} = 2.$$

46. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}.$

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$; no obstante, no se puede aplicar la regla de l'Hôpital por la razón expuesta en el ejercicio **44**.

Ahora bien, como sen x y cos x están acotados (entre +1 y −1), $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$ y, por tanto, dividiendo el numerador y el denominador por x, se obtiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x}}{\dfrac{x + \cos x}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \dfrac{\cos x}{x}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

47. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x - \ln(\cos x)}{x^2}.$

Es una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$; aplicando dos veces la regla de l'Hôpital, operando antes de aplicar la segunda vez dicha regla, resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1 + \operatorname{tg}^2 x}{2} = \frac{1 + 1 + 0}{2} = 1.$$

48. $\lim\limits_{x \to 0} (a^{2x} - 1)^{x/2}.$

Se trata de una indeterminación del tipo 0^0.

Si $A = \lim\limits_{x \to 0} (a^{2x} - 1)^{x/2}$ es el límite que se busca, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se tiene:

$$\ln A = \ln [\lim_{x \to 0} (a^{2x} - 1)^{x/2}] = \lim_{x \to 0} [\ln(a^{2x} - 1)^{x/2}] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{x}{2} \cdot \ln(a^{2x} - 1) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(a^{2x} - 1)}{2x^{-1}}.$$

Resulta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando dos veces la regla de l'Hôpital, operando cada vez que se aplica dicha regla, se deduce:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2a^{2x} \cdot \ln a}{a^{2x} - 1}}{-2x^{-2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot a^{2x} \cdot \ln a}{-a^{2x} + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(2x \cdot a^{2x} + x^2 \cdot 2a^{2x} \cdot \ln a) \ln a}{-2a^{2x} \cdot \ln a} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2a^{2x} \cdot \ln a (x + x^2 \cdot \ln a)}{-2a^{2x} \cdot \ln a} = \lim_{x \to 0} -(x + x^2 \cdot \ln a) = -(0 + 0 \cdot \ln a) = 0.$$

Por consiguiente, $\lim_{x \to 0} (a^{2x} - 1)^{x/2} = e^{\ln A} = e^0 = 1.$

49. $\lim_{x \to 0} (\cotg 2x)^{1/\ln x}$.

Es una indeterminación del tipo ∞^0.

Si $A = \lim_{x \to 0} (\cotg 2x)^{1/\ln x}$ es el límite pedido, su valor es $A = e^{\ln A}$.

Tomando logaritmos neperianos en la primera igualdad, se obtiene:

$$\ln A = \ln [\lim_{x \to 0} (\cotg 2x)^{1/\ln x}] = \lim_{x \to 0} [\ln (\cotg 2x)^{1/\ln x}] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln (\cotg 2x)}{\ln x}.$$

Resulta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la regla de l'Hôpital y operando, se deduce:

$$\ln A = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{-2}{\operatorname{sen}^2 2x} : \cotg 2x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-2x}{\operatorname{sen}^2 2x} \cdot \operatorname{tg} 2x \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-2x}{\operatorname{sen}^2 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{\operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{2}} = \lim_{4x \to 0} \frac{-4x}{\operatorname{sen} 4x} = -1.$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0} (\cotg 2x)^{1/\ln x} = e^{\ln A} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

50. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x(e^x + 1)} \right]$.

Se trata de una indeterminación del tipo $\infty - \infty$, que se resuelve realizando la sustracción. Es decir:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x(e^x + 1)} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 1 - 1}{2x(e^x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2x(e^x + 1)} = \frac{1}{0 \cdot (1 + 1)} = \frac{1}{0} \to \infty.$$

51. Demostrar que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 13 = 0$ no puede tener más de una raíz real.

(Sugerencia: Ver primero si la derivada se anula en algún punto.)

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Si se considera la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 13$, la ecuación propuesta equivale a $f(x) = 0$.

Por ser $f(x)$ una función polinómica, es función continua y derivable en todo punto $x \in R$; su función derivada es $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 = 3(x^2 + 4x + 5)$.

La ecuación $f'(x) = 0$ no tiene ninguna solución real, ya que el discriminante de la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$ es $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$; por tanto, no existe ningún valor real de x que haga $f'(x) = 0$.

Se demuestra la proposición propuesta por *reducción al absurdo*. En efecto, supóngase que la ecuación $f(x) = 0$ tuviera dos raíces reales distintas a y b, de manera que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$; de acuerdo con el teorema de Rolle, aplicado a la función $f(x)$, existiría al menos un punto c, interior al intervalo (a, b), $c \in (a, b)$, en el que la derivada de la función $f(x)$ en el punto c sería nula, $f'(c) = 0$. Como la derivada $f'(x)$ no se anula para ningún valor real de x, la hipótesis de partida [que la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces reales distintas a y b] es falsa; por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ no puede tener más de una raíz real.

Nota: Teniendo en cuenta que $f(-1) = -23$ y $f(1) = 9$ resulta, en virtud del Teorema de Balzano, que al menos existe un valor $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Este resultado, junto al demostrado anteriormente, prueba que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 13 = 0$ posee exactamente una solución real.

TEMA III-2.2. —— Teorema de Taylor

Ejercicios resueltos

1. *Aplicar la fórmula de Taylor al polinomio* $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, *en el punto* $x = 2$.

   (Propuesto en la Univ. de Valencia.)

   Derivando sucesivamente $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$:

   $P'(x) = 3x^2 - 12x + 12$; $P''(x) = 6x - 12$; $P^{(3}(x) = 6$, siendo nulas las demás derivadas sucesivas.

   Para $x = 2$:

   $P(2) = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$; $P'(2) = 12 - 24 + 12 = 0$; $P''(2) = 12 - 12 = 0$; $P^{(3}(2) = 6$.

   Por tanto:

$$P(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-2) + \frac{0}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-3)^3 \rightarrow P(x) = (x-2)^3.$$

2. *Obtener los tres primeros términos del desarrollo de Taylor, para* $x = \frac{\pi}{2}$, *de* $f(x) = x \cdot \cos x$.

   (Propuesto en la Univ. de Santiago.)

   Derivando $f(x) = x \cdot \cos x$:

$$f'(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x; \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x\cos x = -2\operatorname{sen} x - x\cos x;$$

$$f^{(3}(x) = -2\cos x - \cos x + x \operatorname{sen} x = -3\cos x + x\operatorname{sen} x.$$

   Para $x = \frac{\pi}{2}$ se convierten en:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0; \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = -2; \qquad f^{(3}(\zeta) = -3\cos\zeta + \zeta\cdot\operatorname{sen}\zeta.$$

   De donde:

$$f(x) = x\cdot\cos x = 0 + \frac{-\pi/2}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{-2}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{-3\cos\zeta + \zeta\cdot\operatorname{sen}\zeta}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

$$x\cdot\cos x = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\zeta\cdot\operatorname{sen}\zeta}{6} - \frac{\cos\zeta}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

3. *Desarrollar* $f(x) = x \cdot e^x$ *por la fórmula de Mac-Laurin, escribiendo el término complementario correspondiente a la cuarta derivada.*

   (Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

   A partir de $f(x) = x \cdot e^x$, se obtiene:

   $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1 + x)\cdot e^x$; $\qquad f''(x) = e^x + (1 + x)\cdot e^x = (2 + x)\cdot e^x$;

   $f^{(3}(x) = e^x + (2 + x)\cdot e^x = (3 + x)\cdot e^x$; $\qquad f^{(4}(x) = e^x + (3 + x)\cdot e^x = (4 + x)\cdot e^x$.

La función y las tres primeras derivadas, para $x = 0$, se convierten en:

$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$; $f'(0) = (1 + 0) \cdot e^0 = 1$; $f''(0) = (2 + 0) \cdot e^0 = 2$; $f^{3)}(0) = (3 + 0) \cdot e^0 = 3$.

La cuarta derivada, para θx, es: $f^{4)}(\theta x) = (4 + \theta x) \cdot e^{\theta x}$.

Por tanto, el desarrollo pedido es:

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{(4 + \theta x) \cdot e^{\theta x}}{4!}x^4.$$

$$x \cdot e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{(4 + \theta x) \cdot e^{\theta x}}{24}x^4; \ (0 < \theta < 1).$$

4. *Desarrollar por la fórmula de Taylor, en un entorno de* $x = 0$, *la función* $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

Como es un entorno de $x = 0$, es aplicable la *fórmula de Mac-Laurin.*

$f(x)$ se puede escribir, efectuando la división entera:

$$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x} = -1 + \frac{2}{1 - x} = -1 - \frac{2}{x - 1} = -1 - 2(x - 1)^{-1}.$$

Derivando sucesivamente:

$$f'(x) = 0 - 2 \cdot (-1)(x - 1)^{-2} = 2 \cdot 1!(x - 1)^{-2};$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1!(-2)(x - 1)^{-3} = -2 \cdot 2!(x - 1)^{-3};$$

$$f^{3)}(x) = -2 \cdot 2!(-3)(x - 1)^{-4} = 2 \cdot 3!(x - 1)^{-4};$$

$$f^{4)}(x) = 2 \cdot 3!(-4)(x - 1)^{-5} = -2 \cdot 4!(x - 1)^{-5}.$$

Prosiguiendo, se obtendría:

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 2n!(x - 1)^{-(n+1)}; \qquad f^{n+1)}(x) = (-1)^{n+2} \cdot 2 \cdot (n + 1)!\,(x - 1)^{-(n+2)}.$$

Por consiguiente, el resto es:

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2 \cdot (n + 1)! \cdot (\theta x - 1)^{-(n+2)}}{(n + 1)!}x^{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{2x^{n+1}}{(\theta x - 1)^{n+2}}.$$

Y en valor absoluto:

$$|R_n(x)| = \frac{2x^{n+1}}{(\theta x - 1)^{n+2}}, \text{ que tiende a cero si } |x| > 1.$$

Para $x = 0$, los valores de la función y de sus derivadas sucesivas son:

$$f(0) = -1 - 2(-1)^{-1} = 1; \qquad f'(0) = 2(-1)^{-2} = 2; \qquad f''(0) = -2 \cdot 2!(-1)^{-3} = 2 \cdot 2!;$$

$$f^{3)}(0) = 2 \cdot 3!(-1)^{-4} = 2 \cdot 3!; \qquad f^{4)}(0) = 2 \cdot 4!; \qquad ...; \qquad f^{n)}(0) = 2 \cdot n!$$

El desarrollo en serie es:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2 \cdot 2!}{2!}x^2 + \frac{2 \cdot 3!}{3!}x^3 + \frac{2 \cdot 4!}{4!}x^4 + ... + \frac{2 \cdot n!}{n!}x^n + ...$$

$$\frac{1 + x}{1 - x} = 1 + 2(x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n + ...); \ (|x| > 1).$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Obtener los polinomios de Taylor de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^4 - 7x^3 + 2$, en $x = 2$;

b) $P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$, en $x = -1$;

c) $P(x) = (x-1)^3 \cdot (x-2)^2$, en $x = -1$;

d) $P(x) = x^5 - 1$, en $x = 1$;

e) $P(x) = (x-1)$, en $x = 2$.

a) Derivando sucesivamente $P(x) = x^4 - 7x^3 + 2$, resulta:

$$P'(x) = 4x^3 - 21x^2;\quad P''(x) = 12x^2 - 42x;\quad P^{(3}(x) = 24x - 42;\quad P^{(4}(x) = 24.$$

La quinta derivada y todas las de orden superior son nulas.

Para $x = 2$ se obtienen los siguientes valores:

$$P(2) = 2^4 - 7\cdot 2^3 + 2 = 16 - 56 + 2 = -38;\quad P'(2) = 4\cdot 2^3 - 21\cdot 2^2 = 32 - 84 = -52;$$

$$P''(2) = 12\cdot 2^2 - 42\cdot 2 = 48 - 84 = -36;\quad P^{(3}(2) = 24\cdot 2 - 42 = 48 - 42 = 6;\quad P^{(4}(2) = 24.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor es:

$$P_4(x) = -38 - \frac{52}{1!}(x-2) - \frac{36}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4;$$

$$P_4(x) = -38 - 52(x-2) - 18(x-2)^2 + (x-2)^3 + (x-2)^4.$$

b) Se deriva sucesivamente $P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$:

$$P'(x) = -2 + 6x - 12x^2 + 20x^3;\quad P''(x) = 6 - 24x + 60x^2;\quad P^{(3}(x) = -24 + 120x;\quad P^{(4}(x) = 120.$$

La quinta derivada y todas las de orden superior son nulas.

Para $x = 1$ se consiguen los valores siguientes:

$$P(-1) = 1 - 2(-1) + 3(-1)^2 - 4(-1)^3 + 5(-1)^4 = 15;$$

$$P'(-1) = -2 + 6(-1) - 12(-1)^2 + 20(-1)^3 = -40;\quad P''(-1) = 6 - 24(-1) + 60(-1)^2 = 90;$$

$$P^{(3}(-1) = -24 + 120(-1) = -144;\quad P^{(4}(-1) = 120.$$

Por consiguiente, el polinomio de Taylor es:

$$P_4(x) = 15 - \frac{40}{1!}(x+1) + \frac{90}{2!}(x+1)^2 - \frac{144}{3!}(x+1)^3 + \frac{120}{4!}(x+1)^4;$$

$$P_4(x) = 15 - 40(x+1) + 45(x+1)^2 - 24(x+1)^3 + 5(x+1)^4.$$

c) Derivando sucesivamente $P(x) = (x-1)^3\cdot(x-2)^2 = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$, se tiene:

$$P'(x) = 5x^4 - 28x^3 + 57x^2 - 50x + 16;\quad P''(x) = 20x^3 - 84x^2 + 114x - 50;$$

$$P^{(3}(x) = 60x^2 - 168x + 114;\quad P^{(4}(x) = 120x - 168;\quad P^{(5}(x) = 120.$$

La derivada sexta y todas las de orden superior son nulas.

Para $x = -1$ se obtienen los siguientes valores:

$$P(-1) = (-1)^5 - 7(-1)^4 + 19(-1)^3 - 25(-1)^2 + 16(-1) - 4 = -72;$$

$$P'(-1) = 5(-1)^4 - 28(-1)^3 + 57(-1)^2 - 50(-1) + 16 = 156;$$

$$P''(-1) = 20(-1)^3 - 84(-1)^2 + 114(-1) - 50 = -268;$$

$$P^{(3)}(-1) = 60(-1)^2 - 168(-1) + 114 = 342;$$

$$P^{(4)}(-1) = 120(-1) - 168 = -288; \quad P^{(5)}(-1) = 120.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor es:

$$P_5(x) = -72 + \frac{156}{1!}(x+1) - \frac{268}{2!}(x+1)^2 + \frac{342}{3!}(x+1)^3 - \frac{288}{4!}(x+1)^4 + \frac{120}{5!}(x+1)^5;$$

$$P_5(x) = -72 + 156(x+1) - 134(x+1)^2 + 57(x+1)^3 - 12(x+1)^4 + (x+1)^5.$$

d) Se deriva sucesivamente $P(x) = x^5 - 1$:

$$P'(x) = 5x^4; \quad P''(x) = 20x^3; \quad P^{(3)}(x) = 60x^2; \quad P^{(4)}(x) = 120x; \quad P^{(5)}(x) = 120.$$

La derivada sexta y todas las de orden superior son nulas.

Para $x = 1$ se consiguen los valores siguientes:

$$P(1) = 1^5 - 1 = 0; \quad P'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5; \quad P''(1) = 20 \cdot 1^3 = 20;$$

$$P^{(3)}(1) = 60 \cdot 1^2 = 60; \quad P^{(4)}(1) = 120 \cdot 1 = 120; \quad P^{(5)}(1) = 120.$$

Por consiguiente, el polinomio de Taylor es:

$$P_5(x) = 0 + \frac{5}{1!}(x-1) + \frac{20}{2!}(x-1)^2 + \frac{60}{3!}(x-1)^3 + \frac{120}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5;$$

$$P_5(x) = 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5.$$

e) Derivando sucesivamente $P(x) = x - 1$, se deduce:

$$P'(x) = 1.$$

Las demás derivadas sucesivas son nulas.

Para $x = 2$ se obtienen los siguientes valores:

$$P(2) = 2 - 1 = 1; \quad P'(2) = 1.$$

Por tanto el polinomio de Taylor es:

$$P_1(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-2) = 1 + (x-2).$$

2. Aproximar mediante polinomios de cuarto grado las funciones siguientes, obteniendo sus términos complementarios:

a) $f(x) = \operatorname{tg} x;$ *b)* $f(x) = \ln(1-x);$

c) $f(x) = 3^x;$ *d)* $f(x) = \operatorname{sen} 3x;$

e) $f(x) = \cos^2 x;$ *f)* $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x};$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2};$ *h)* $f(x) = \dfrac{1-3x}{1-x^2}.$

Utilizando la fórmula de Mac-Laurin, para aproximar una función $f(x)$ hasta el cuarto grado, se desarrolla mediante la expresión:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_4,$$

siendo $R_4 = \dfrac{f^{(5)}(\theta x)}{5!}x^5$ el resto o término complementario del desarrollo, para $0 < \theta < 1$.

En cada uno de los casos se calculan las cinco primeras derivadas sucesivas de la función que se desarrolla y se particularizan los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$.

a) Para la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ las cinco primeras derivadas sucesivas son:

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x; \quad f''(x) = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^3 x;$$

$$f^{3)}(x) = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 6\operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2 + 8\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg}^4 x;$$

$$f^{4)}(x) = 16\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 24\operatorname{tg}^3 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 16\operatorname{tg} x + 40\operatorname{tg}^3 x + 24\operatorname{tg}^5 x;$$

$$f^{5)}(x) = 16(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 120\operatorname{tg}^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 120\operatorname{tg}^4 x(1 + \operatorname{tg}^2 x) =$$

$$= 16 + 136\operatorname{tg}^2 x + 240\operatorname{tg}^4 x + 120\operatorname{tg}^6 x.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f^{3)}(0) = 2; \quad f^{4)}(0) = 0.$$

Sustituyendo los valores anteriores en la fórmula de Mac-Laurin, se obtiene:

$$\operatorname{tg} x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + R_4 = x + \frac{x^3}{3} + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{16 + 136\operatorname{tg}^2(\theta x) + 240\operatorname{tg}^4(\theta x) + 120\operatorname{tg}^6(\theta x)}{5!}x^5, \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

b) Para la función $f(x) = \ln(1 - x)$ las cinco primeras derivadas sucesivas son:

$$f'(x) = -(1 - x)^{-1}; \quad f''(x) = -(1 - x)^{-2}; \quad f^{3)}(x) = -2(1 - x)^{-3};$$

$$f^{4)}(x) = -6(1 - x)^{-4}; \quad f^{5)}(x) = -24(1 - x)^{-5}.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = -1; \quad f''(0) = -1; \quad f^{3)}(0) = -2; \quad f^{4)}(0) = -6.$$

Reemplazando estos valores en la fórmula de Mac-Laurin, se deduce:

$$\ln(1 - x) = 0 - \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + R_4 = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{-24(1 - \theta x)^{-5}}{5!}x^5 = -\frac{(1 - \theta x)^{-5}}{5}x^5, \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

c) Para la función $f(x) = 3^x$ las cinco primeras derivadas sucesivas son:

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3; \quad f''(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^2; \quad f^{3)}(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^3;$$

$$f^{4)}(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^4; \quad f^{5)}(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^5.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = \ln 3; \quad f''(0) = (\ln 3)^2; \quad f^{3)}(0) = (\ln 3)^3; \quad f^{4)}(0) = (\ln 3)^4.$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula de Mac-Laurin, resulta:

$$3^x = 1 + \frac{\ln 3}{1!}x + \frac{(\ln 3)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln 3)^3}{3!}x^3 + \frac{(\ln 3)^4}{4!}x^4 + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{3^{\theta x} \cdot (\ln 3)^5}{5!}x^5, \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

d) Para la función $f(x) = \operatorname{sen} 3x$ las cinco primeras derivadas sucesivas son:

$$f'(x) = 3\cos 3x;\ f''(x) = -9\operatorname{sen} 3x;\ f^{3)}(x) = -27\cos 3x;\ f^{4)}(x) = 81\operatorname{sen} 3x;\ f^{5)}(x) = 243\cos 3x.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 3;\ f''(0) = 0;\ f^{3)}(0) = -27;\ f^{4)}(0) = 0.$$

Reemplazando estos valores en la fórmula de Mac-Laurin, se tiene:

$$\operatorname{sen} 3x = 0 + \frac{3}{1!}x + 0 - \frac{27}{3!}x^3 + 0 + R_4 = 3x - \frac{9}{2}x^3 + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{243\cos(3\theta x)}{5!}x^5 = \frac{81\cos(3\theta x)}{40}x^5, \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

e) Para la función $f(x) = \cos^2 x$ las cinco primeras derivadas sucesivas son:

$$f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} 2x;\ f''(x) = -2\cos 2x;$$

$$f^{3)}(x) = 4\operatorname{sen} 2x;\ f^{4)}(x) = 8\cos 2x;\ f^{5)}(x) = -16\operatorname{sen} 2x.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = 0;\ f''(0) = -2;\ f^{3)}(0) = 0;\ f^{4)}(0) = 8.$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula de Mac-Laurin, resulta:

$$\cos^2 x = 1 + 0 - \frac{2}{2!}x^2 + 0 + \frac{8}{4!}x^4 + R_4 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{-16\operatorname{sen}(2\theta x)}{5!}x^5 = -\frac{2\operatorname{sen}(2\theta x)}{15}x^5, \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

f) Efectuando la división entera, la función $f(x)$ se puede escribir:

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x} = -1 + \frac{2}{1 + x} = -1 + 2(1 + x)^{-1}.$$

Las cinco primeras derivadas sucesivas de la función $f(x)$ son:

$$f'(x) = -2(1 + x)^{-2};\ f''(x) = 4(1 + x)^{-3};\ f^{3)}(x) = -12(1 + x)^{-4};$$

$$f^{4)}(x) = 48(1 + x)^{-5};\ f^{5)}(x) = -240(1 + x)^{-6}.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = -2;\ f''(0) = 4;\ f^{3)}(0) = -12;\ f^{4)}(0) = 48.$$

Reemplazando los valores anteriores en la fórmula de Mac-Laurin, se obtiene:

$$\frac{1 - x}{1 + x} = 1 - \frac{2}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 - \frac{12}{3!}x^3 + \frac{48}{4!}x^4 + R_4 = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{-240(1 + \theta x)^{-6}}{5!}x^5 = -\frac{2}{(1 + \theta x)^6}x^5, \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

Nota: El procedimiento más útil (y más sencillo) para desarrollar en serie una función racional $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ consiste en efectuar la división $g(x) : h(x)$.

Se demuestra que el desarrollo obtenido es válido para todos los valores de x cuyo valor absoluto sea menor que el más pequeño de los módulos de las raíces del polinomio denominador.

Así pues, para desarrollar en serie la función $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ se puede efectuar la división:

$$\begin{array}{l|l} 1 - x & 1 + x \\ \cline{2-2} -1 - x & 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - \ldots \\ \hline \quad - 2x & \\ \quad + 2x + 2x^2 & \\ \hline \qquad 2x^2 & \\ \qquad - 2x^2 - 2x^3 & \\ \hline \qquad\quad - 2x^3 & \\ \qquad\quad + 2x^3 + 2x^4 & \\ \hline \qquad\qquad 2x^4 & \\ \qquad\qquad - 2x^4 - 2x^5 & \\ \hline \qquad\qquad\quad - 2x^5 & \end{array}$$

Se obtiene que $\frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - \ldots$, desarrollo que es válido para $|x| < 1$, ya que el polinomio denominador (binomio $1 + x$) tiene como raíz $x = -1$, cuyo módulo es 1.

g) Realizando la división entera, la función f(x) se escribe:

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2} = 1 - (x+2)^{-1}.$$

Las cinco primeras derivadas sucesivas de la función f(x) son:

$$f'(x) = (x+2)^{-2};\quad f''(x) = -2(x+2)^{-3};\quad f^{(3)}(x) = 6(x+2)^{-4};$$

$$f^{(4)}(x) = -24(x+2)^{-5};\quad f^{(5)}(x) = 120(x+2)^{-6}.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = \frac{1}{2};\quad f'(0) = \frac{1}{4};\quad f''(0) = -\frac{1}{4};\quad f^{(3)}(0) = \frac{3}{8};\quad f^{(4)}(0) = -\frac{3}{4}.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Mac-Laurin, se deduce:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 1!}x - \frac{1}{4 \cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}x^3 - \frac{3}{4 \cdot 4!}x^4 + R_4 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{120(\theta x + 2)^{-6}}{5!}x^5 = \frac{1}{(\theta x + 2)^6}x^5, \text{ para } 0 < \theta < 1.$$

Nota: Se podría efectuar la división $(1 + x) : (2 + x)$ para obtener el desarrollo de la función $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

h) Descomponiendo la función f(x) en suma de fracciones simples, se tiene:

$$f(x) = \frac{1-3x}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(A+B) + (A-B)x}{1-x^2}.$$

Identificando los respectivos coeficientes de los numeradores de las fracciones primera y última, se obtiene:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 2. \end{cases}$$

Por tanto, la función f(x) se escribe:

$$f(x) = -\frac{1}{1 - x} + \frac{2}{1 + x} = (x - 1)^{-1} + 2(x + 1)^{-1}.$$

Las cinco primeras derivadas sucesivas de la función f(x) son:

$$f'(x) = -(x - 1)^{-2} - 2(x + 1)^{-2}; \quad f''(x) = 2(x - 1)^{-3} + 4(x + 1)^{-3};$$

$$f^{3)}(x) = -6(x - 1)^{-4} - 12(x + 1)^{-4}; \quad f^{4)}(x) = 24(x - 1)^{-5} + 48(x + 1)^{-5};$$

$$f^{5)}(x) = -120(x - 1)^{-6} - 240(x + 1)^{-6}.$$

Los valores de la función y de las cuatro primeras derivadas para x = 0 son:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = -3; \quad f''(0) = 2; \quad f^{3)}(0) = -18; \quad f^{4)}(0) = 24.$$

Reemplazando los resultados anteriores en la fórmula de Mac-Laurin, resulta:

$$\frac{1 - 3x}{1 - x^2} = 1 - \frac{3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{18}{3!}x^3 + \frac{24}{4!}x^4 + R_4 = 1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 + R_4;$$

$$R_4(x) = \frac{-120(\theta x - 1)^{-6} - 240(\theta x + 1)^{-6}}{5!}x^5 = -\left[\frac{1}{(\theta x - 1)^6} + \frac{2}{(\theta x + 1)^6}\right]x^5.$$

Nota 1ª: Para desarrollar en serie una función puede ser útil, a veces, descomponerla en varias más sencillas, cuyos desarrollos sean conocidos o se calculen más fácilmente.

Así, por ejemplo, la función anterior, $f(x) = \frac{1 - 3x}{1 - x^2} = \frac{1}{x - 1} + 2 \cdot \frac{1}{x + 1} = g(x) + 2h(x)$, se puede desarrollar en serie hallando los desarrollos de g(x) y de h(x). El desarrollo de f(x) es igual al de g(x) sumado con el doble del de h(x).

Nota 2ª: Otra manera de aproximar la función $f(x) = \frac{1 - 3x}{1 - x^2}$, mediante un polinomio (en este caso de cuarto grado), es considerar $\frac{1}{1 - x^2}$ como la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica, cuyo primer término es 1 y cuya razón es $x^2 < 1$.

Como la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada decreciente es igual al primer término dividido por 1 menos la razón, para $-1 < x < 1$ (o bien para $|x| < 1$), se tiene:

$$\frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

Por tanto, el polinomio que aproxima la función f(x), para $|x| < 1$, es:

$$\frac{1 - 3x}{1 - x^2} = (1 - 3x)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) = 1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 + \dots$$

3. Obtener los cinco primeros términos del desarrollo de $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

[Sugerencia: $\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2}$.]

Se va a aplicar la fórmula de Mac-Laurin. Para ello se calculan las cuatro primeras derivadas sucesivas de la función $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ y se particularizan los valores de la función y de dichas derivadas para $x = 0$:

$$f(x) = (1+x)^{1/2} \rightarrow f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \rightarrow f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f^{3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \rightarrow f^{3)}(0) = \frac{3}{8},$$

$$f^{4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2} \rightarrow f^{4)}(0) = -\frac{15}{16}.$$

Sustituyendo los valores hallados en la fórmula de Mac-Laurin, se deduce:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x - \frac{1}{4 \cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}x^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!}x^4 + R_4;$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + R_4.$$

Nota: Para obtener los desarrollos en serie de funciones de la forma $f(u) = (a+u)^m$, siendo a una constante, u una función de una variable y m un número racional cualquiera, se puede utilizar la llamada fórmula generalizada del binomio de Newton, deducida desarrollando en serie la función anterior $f(u)$ por medio de la fórmula de Mac-Laurin.

Las derivadas sucesivas de la función $f(u)$ y los valores particulares de la función y de dichas derivadas para $u = 0$ son:

$$f(u) = (a+u)^m \rightarrow f(0) = a^m,$$

$$f'(u) = m(a+u)^{m-1} \rightarrow f'(0) = ma^{m-1},$$

$$f''(u) = m(m-1)(a+u)^{m-2} \rightarrow f''(0) = m(m-1)a^{m-2},$$

$$f^{3)}(u) = m(m-1)(m-2)(a+u)^{m-3} \rightarrow f^{3)}(0) = m(m-1)(m-2)a^{m-3},$$

$$\ldots \rightarrow \ldots$$

Sustituyendo los valores anteriores en la fórmula de Mac-Laurin, resulta la fórmula generalizada del binomio de Newton:

$$(a+u)^m = a^m + \frac{m}{1!}a^{m-1}u + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}a^{m-3}u^3 + \ldots$$

Si m es un valor entero el desarrollo de esta serie termina cuando se llega al factor $m - m$. Al pasar de un término al siguiente, los exponentes de a disminuyen en una unidad, mientras que los de x aumentan en una unidad; es decir, todos los términos de la serie son de grado m.

Estudiando el resto se deduce que el desarrollo es válido, con carácter general, para valores de u que cumplan $|u| < 1$.

Aplicando este resultado a la función del presente ejercicio $\left(\text{con } a = 1,\ u = x \text{ y } m = \frac{1}{2}\right)$, para $|x| < 1$, se obtiene:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3 + \ldots;$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots$$

4. Calcular los cuatro primeros términos de $f(x) = \sqrt[n]{1 + x}$.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

Se calculan las tres primeras derivadas sucesivas de la función $f(x) = \sqrt[n]{1 + x} = (1 + x)^{1/n}$ y se hallan los valores de la función y de dichas derivadas para $x = 0$:

$$f(x) = (1 + x)^{1/n} \rightarrow f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{n}(1 + x)^{(1-n)/n} \rightarrow f'(0) = \frac{1}{n},$$

$$f''(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n}(1 + x)^{(1-2n)/n} \rightarrow f''(0 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n} = \frac{1-n}{n^2},$$

$$f^{3)}(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n} \cdot \frac{1-2n}{n}(1 + x)^{(1-3n)/n} \rightarrow$$

$$\rightarrow f^{3)}(0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-n}{n} \cdot \frac{1-2n}{n} = \frac{1 - 3n + 2n^2}{n^3}.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Mac-Laurin, se tiene:

$$\sqrt[n]{1 + x} = 1 + \frac{1}{1!\,n}x + \frac{1-n}{2!\,n^2}x^2 + \frac{1 - 3n + 2n^2}{3!\,n^3}x^3 + R_3.$$

Aplicando directamente la fórmula generalizada del binomio de Newton, obtenida en la nota del ejercicio anterior, $\left(\text{con } a = 1,\ u = x \text{ y } m = \frac{1}{n}\right)$, para $|x| < 1$, se deduce:

$$\sqrt[n]{1 + x} = (1 + x)^{1/n} = 1 + \frac{1/n}{1!}x + \frac{1/n(1/n - 1)}{2!}x^2 + \frac{1/n(1/n - 1)(1/n - 2)}{3!}x^3 + \ldots;$$

$$\sqrt[n]{1 + x} = 1 + \frac{1}{1!\,n}x + \frac{1-n}{2!\,n^2}x^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{3!\,n^3}x^3 + \ldots$$

5. Aplicando el resultado del ejercicio **3**, calcular $\sqrt{10}$, tomando tres términos del desarrollo.

$\left(\textbf{Sugerencia: } \sqrt{10} = 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}}.\right)$

De acuerdo con el resultado del ejercicio **3**: $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_2$.

Por tanto, para $x = \frac{1}{9}$, se tiene:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1 + \frac{1}{18} - \frac{1}{648} = \frac{648 + 36 - 1}{648} = \frac{683}{648}.$$

Es decir: $\sqrt{10} = 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \approx 3 \cdot \frac{683}{648} = \frac{683}{216} \approx 3{,}1620.$

6. Calcular de igual forma $\sqrt{17}$.

Como $\sqrt{17} = \sqrt{16 + 1} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}}$, utilizando el desarrollo de la función $\sqrt{1 + x}$ para $x = \frac{1}{16}$, se obtiene:

$$\sqrt{1+\frac{1}{16}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2 = 1 + \frac{1}{32} - \frac{1}{2\,048} =$$

$$= \frac{2\,048 + 64 - 1}{2\,048} = \frac{2\,111}{2\,048}.$$

Así pues: $\sqrt{17} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}} \approx 4\cdot\frac{2\,111}{2\,048} = \frac{2\,111}{512} \approx 4{,}1230.$

7. Si en la fórmula de Taylor se hace $x = a + h$, resulta:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{3)}(a)}{3!}h^3 + \ldots$$

Aplicando el resultado anterior, obtener sen 31°.

$\left[\right.$ **Sugerencia:** $1° = \frac{\pi}{180}$ rad; $31° = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$ rad; hágase $a = \frac{\pi}{6}$ y $h = \frac{\pi}{180}$. $\left.\right]$

Teniendo en cuenta que $x = 31° = a + h = 30° + 1° = \frac{\pi}{6}$ rad $+ \frac{\pi}{180}$ rad y que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = a$ es

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a + \frac{\cos a}{1!}h - \frac{\operatorname{sen} a}{2!}h^2 - \frac{\cos a}{3!}h^3 + \ldots,$$

para $a = \frac{\pi}{6}$ rad y $h = \frac{\pi}{180}$ rad, se deduce:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{\cos \pi/6}{1!}\cdot\frac{\pi}{180} - \frac{\operatorname{sen}\pi/6}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{\cos\pi/6}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \ldots$$

Al ser $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1!}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \ldots;$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360} - \frac{\pi^2}{129\,600} - \frac{\pi^3\sqrt{3}}{69\,984\,000} + \ldots;$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}5 + 0{,}015115 - 0{,}000076 - 0{,}000001 = 0{,}515038.$$

Es decir, sen 31° $\approx$ 0,515038.

8. Calcular ln 21, sabiendo que ln 20 = 2,9957.

Teniendo presente que $x = 21 = a + h = 20 + 1$ y que el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = \ln x$ en $x = a$, según la fórmula del ejercicio anterior, es

$$\ln(a+h) = \ln a + \frac{1}{1!\,a}h - \frac{1}{2!\,a^2}h^2 + \frac{2}{3!\,a^3}h^3 + \ldots,$$

para $a = 20$ y $h = 1$, se obtiene:

$$\ln(20+1) = \ln 20 + \frac{1}{1!\,20}\cdot 1 - \frac{1}{2!\,20^2}\cdot 1^2 + \frac{2}{3!\,20^3}\cdot 1^3 + \ldots;$$

$$\ln 21 + \ln 20 + \frac{1}{20} - \frac{1}{800} + \frac{2}{48\,000} + \ldots;$$

$$\ln 21 \approx 2{,}9957 + 0{,}05 - 0{,}00125 + 0{,}00004 = 3{,}04449.$$

Por tanto, $\ln 21 \approx 3{,}04449$.

9. Hallar los dos primeros términos, no nulos, de los desarrollos:

a) $\ln(\cos x)$; *b)* $\text{arc sen } x$; *c)* $\text{arc tg } x$; *d)* $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Se van a desarrollar las funciones mediante la fórmula de Mac-Laurin. Para ello se calculan los valores de cada función y de sus derivadas sucesivas para $x = 0$, hasta conseguir que dos de tales valores no sean nulos. Sustituidos dichos valores no nulos en la fórmula de Mac-Laurin se obtienen los desarrollos correspondientes (que tienen dos términos distintos de cero).

a) Para la función $f(x) = \ln(\cos x)$ se tiene:

$$f(x) = \ln(\cos x) \rightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{-\text{sen } x}{\cos x} = -\text{tg } x \rightarrow f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -(1 + \text{tg}^2 x) = -1 - \text{tg}^2 x \rightarrow f''(0) = -1,$$

$$f^{(3}(x) = -2\text{tg } x(1 + \text{tg}^2 x) = -2\text{tg } x - 2\text{tg}^3 x \rightarrow f^{(3}(0) = 0,$$

$$f^{(4}(x) = -2(1 + \text{tg}^2 x) - 6\text{tg}^2 x(1 + \text{tg}^2 x) = -2 - 8\text{tg}^2 x - 6\text{tg}^4 x \rightarrow f^{(4}(0) = -2.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de Mac-Laurin, se deduce:

$$\ln(\cos x) = 0 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 - \frac{2}{4!}x^4 + R_4 = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + R_4.$$

b) Para la función $f(x) = \text{arc sen } x$ resulta:

$$f(x) = \text{arc sen } x \rightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} \rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-3/2}(-2x) = x(1 - x^2)^{-3/2} \rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f^{(3}(x) = (1 - x^2)^{-3/2} + x\left(-\frac{3}{2}\right)(1 - x^2)^{-5/2}(-2x) =$$

$$= (1 - x^2)^{-3/2} + 3x^2(1 - x^2)^{-5/2} \rightarrow f^{(3}(0) = 1.$$

Reemplazando los valores anteriores en la fórmula de Mac-Laurin, se obtiene:

$$\text{arc sen } x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + R_3 = x + \frac{x^3}{6} + R_3.$$

c) Para la función $f(x) = \text{arc tg } x$ se tiene:

$$f(x) = \text{arc tg } x \rightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} \rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f^{3)}(x) = -\frac{2(1 + x^2)^2 - 2(1 + x^2)2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = -\frac{2 - 6x^2}{(1 + x^2)^3} \rightarrow f^{3)}(0) = -2.$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula de Mac-Laurin, se deduce:

$$\text{arc tg } x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{2}{3!}x^3 + R_3 = x - \frac{x^3}{3} + R_3.$$

d) Para la función $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ resulta:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f^{3)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightarrow f^{3)}(0) = 1.$$

Reemplazando estos valores en la fórmula de Mac-Laurin, se obtiene:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + R_3 = x + \frac{x^3}{6} + R_3.$$

Nota 1ª: Los valores de la variable x para los que son válidos los desarrollos anteriores [es decir, los valores de x para los que $\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x)$] son, respectivamente:

a) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; *b)* $-1 < x < 1$; *c)* $-1 < x < 1$; *d)* $x \in R$.

Nota 2ª: Se denominan funciones hiperbólicas a ciertas funciones de R en R definidas a partir de la función exponencial e^x. Se distinguen las funciones seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólicos, funciones representadas, respectivamente, por sh, ch, th y coth y definidas por:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}; \quad \text{coth } x = \frac{1}{\text{th } x}.$$

La trigonometría hiperbólica estudia las propiedades de las funciones hiperbólicas. Su relación fundamental es $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son:

$$\frac{d}{dx}\text{ch } x = \text{sh } x; \quad \frac{d}{dx}\text{sh } x = \text{ch } x; \quad \frac{d}{dx}\text{th } x = \frac{1}{\text{ch}^2 x} = 1 - \text{th}^2 x.$$

La función que se ha desarrollado en este apartado es, pues, la función seno hiperbólico de x, sh x.

El desarrollo de esta función se podría realizar considerando conocido el desarrollo de la función exponencial:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

A partir de él se halla el desarrollo de la función e^{-x}, sustituyendo en el desarrollo de e^x el valor x por su opuesto $-x$:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

Restando ambos desarrollos y dividiendo el resultado por 2, se deduce:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 + \frac{x}{1!} + 0 + \frac{x^3}{3!} + 0 + \dots = x + \frac{x^3}{6} + \dots$$

10. Comprobar los resultados de los siguientes desarrollos en serie:

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$

b) $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots$

c) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots$

d) $\operatorname{arc\,sen} x = x + \dfrac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$

e) $\operatorname{arc\,tg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dots$

f) $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots$

g) $\ln(1 - x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dots$

En cada uno de los casos se calculan las derivadas sucesivas de la función correspondiente y se hallan los valores de la función y de dichas derivadas para $x = 0$. Se sustituyen estos valores en la fórmula de Mac-Laurin y se comprueba que los desarrollos coinciden con los propuestos.

a) Para la función $f(x) = e^x$ resulta:

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{3)}(x) = e^x \rightarrow f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{3)}(0) = 1.$$

Es decir: $e^x = 1 + \dfrac{1}{1!}x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dots = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$

Nota: Este desarrollo es válido para todo valor real de x ($x \in \mathbb{R}$).

b) Para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene:

$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{3)}(x) = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \qquad f^{4)}(x) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = f(x).$$

De forma general se puede expresar la derivada k-ésima por $f^{k)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$, de manera que, para $x = 0$, $f^{k)}(0) = \operatorname{sen}\left(k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$; así pues:

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = 0;\ f^{3)}(0) = -1;\ f^{4)}(0) = 0;$$

$$f^{5)}(0) = 1;\ f^{6)}(0) = 0;\ f^{7)}(0) = -1.$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen} x = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Nota: Este desarrollo es válido para cualquier valor real de x ($x \in R$).

c) Para la función $f(x) = \cos x$ resulta:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \qquad f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(3}(x) = \operatorname{sen} x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \qquad f^{(4}(x) = \cos x = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = f(x).$$

De modo general se puede expresar la derivada k-ésima por $f^{(k}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, de forma que, para $x = 0$, $f^{(k}(0) = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; es decir:

$$f(0) = 1;\ f'(0) = 0;\ f''(0) = -1;\ f^{(3}(0) = 0;\ f^{(4}(0) = 1;\ f^{(5}(0) = 0;\ f^{(6}(0) = -1.$$

Así pues: $\cos x = 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Nota: Este desarrollo es válido para todo valor real de x ($x \in R$).

d) Sustituyendo en la fórmula de Mac-Laurin los valores de la función y de las tres primeras derivadas sucesivas para $x = 0$ se han conseguido los dos primeros términos (no nulos) del desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ en el apartado *b)* del ejercicio **9**. Para obtener los dos siguientes términos (no nulos) del desarrollo hay que sustituir, además, en dicha fórmula los valores de las cuatro siguientes derivadas sucesivas (hasta la séptima incluida) para $x = 0$.

Como el cálculo de tales derivadas es bastante laborioso, se va a utilizar el llamado desarrollo por integración, que consiste en desarrollar la función derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ e integrar seguidamente el desarrollo de dicha función derivada $f'(x)$. Es decir:

1) Se desarrolla la función $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2}$:

Aplicando directamente la fórmula generalizada del binomio de Newton, obtenida en la nota del ejercicio 3, $\left(\text{con } a = 1,\ u = -x^2 \text{ y } m = -\frac{1}{2}\right)$, para $|-x^2| = x^2 < 1$, se deduce:

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{(-1/2)}{1!}(-x^2) + \frac{(-1/2)(-1/2 - 1)}{2!}(-x^2)^2 +$$
$$+ \frac{(-1/2)(-1/2 - 1)(-1/2 - 2)}{3!}(-x^2)^3 + \ldots;$$

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1/2}{1!}x^2 + \frac{(1/2)(3/2)}{2!}x^4 + \frac{(1/2)(3/2)(5/2)}{3!}x^6 + \ldots =$$
$$= 1 + \frac{1 \cdot x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots$$

2) Se integra el desarrollo de $f'(x)$:

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int\left(1 + \frac{1 \cdot x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots\right)dx =$$
$$= x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

Nota: Este desarrollo es válido, pues, para todo valor de x que hace $|x| < 1$.

e) Sustituyendo en la fórmula de Mac-Laurin los valores de la función y de las tres primeras derivadas sucesivas para $x = 0$ se han obtenido los dos primeros términos (no nulos) del desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ en el apartado *c)* del ejercicio **9**. Para conseguir los dos siguientes términos (no nulos) del desarrollo hay que sustituir, además, en dicha fórmula los valores de las cuatro siguientes derivadas sucesivas (hasta la séptima incluida) para $x = 0$.

Como el cálculo de tales derivadas presenta bastante dificultad, se va a utilizar el desarrollo por integración empleado en el apartado anterior. Así pues:

1) Se desarrolla la función $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} = (1 + x^2)^{-1}$:

Aplicando directamente la fórmula generalizada del binomio de Newton, deducida en la nota del ejercicio 3, (con $a = 1$, $u = x^2$ y $m = -1$), para $|x^2| = x^2 < 1$, se obtiene:

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x^2 + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}(x^2)^2 + \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}(x^2)^3 + \ldots;$$

$$(1 + x^2)^{-1} = 1 + \frac{(-1)}{1!}x^2 + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^4 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^6 + \ldots =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

2) Se integra el desarrollo de $f'(x)$:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Nota: Este desarrollo es válido, pues, para todo valor de x que cumple $|x| < 1$.

f) Para la función $f(x) = \ln(1 + x)$ resulta:

$$f'(x) = (1 + x)^{-1};\ f''(x) = -(1 + x)^{-2};\ f^{(3)}(x) = 2(1 + x)^{-3};\ f^{(4)}(x) = -6(1 + x)^{-4}.$$

Los valores de la función y de dichas derivadas para $x = 0$ son:

$$f(0) = 0;\ f'(0) = 1;\ f''(0) = -1;\ f^{(3)}(0) = 2;\ f^{(4)}(0) = -6.$$

Es decir:

$$\ln(1 + x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \ldots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Nota: Este desarrollo es válido para todo valor de x que cumple $-1 < x \leqslant 1$.

g) En el apartado *b)* del ejercicio **2** se ha calculado, en efecto, que el desarrollo de la función $f(x) = \ln(1 - x)$ es:

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Nota 1ª: Este desarrollo es válido para los valores de x tales que $-1 \leqslant x < 1$.

Nota 2ª: Se puede hallar el desarrollo de la función $f(x) = \ln(1 - x)$ sustituyendo en el desarrollo de la función $f(x) = \ln(1 + x)$, obtenido en el apartado anterior, el valor x por su opuesto $-x$:

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

TEMA III-2.3. — Aplicaciones del teorema de Taylor

Ejercicios resueltos

1. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x} \right) = A.$

Se recuerda que $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Se determinan los desarrollos de sen x y de cos x:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots \text{ y } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$

$$A = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \cdot \operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x \cdot \cos x}{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}.$$

Sustituyendo:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots \right) - x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots \right)}{x^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots \right)};$$

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \ldots}{x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \ldots} = \frac{1}{3}.$$

2. *Hallar las máximos y mínimos relativos de* $f(x) = x^2 - |x| + 2$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

La función dada $\begin{cases} \text{si } x < 0, \text{ es } f_1(x) = x^2 - (-x) + 2 = x^2 + x + 2; \\ \text{si } x > 0, \text{ es } f_2(x) = x^2 - x + 2. \end{cases}$

La función derivada para $x < 0$ es $f_1'(x) = 2x + 1$; se anula $(2x + 1 = 0)$ para $x_1 = -\frac{1}{2}$.

Como $f_1''(x) = 2$, $f_1''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ y en $x = -\frac{1}{2}$ hay un **mínimo**.

La función derivada para $x > 0$ es $f_2'(x) = 2x - 1$; se anula $(2x - 1 = 0)$ para $x_2 = \frac{1}{2}$.

Como $f_2''(x) = 2$, $f_2''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ y en $x = \frac{1}{2}$ hay, también, un **mínimo**.

Pero, además, como en $x = 0$ *la función es continua, pero no es derivable,* hay que investigar si existe en dicho punto algún extremo relativo no obtenible por el método general.

Obsérvese que en un entorno del punto $x = 0$ *la derivada a la izquierda* es $f_1' = 2x + 1$ que, para puntos «lo suficientemente próximos», *es positiva; la derivada a la derecha* es $f_2'(x) = 2x - 1$ que, para puntos «lo suficientemente próximos», *es negativa;* luego, en $x = 0$ la función admite un **máximo relativo.**

$f(x) = x^2 - |x| + 2$ tiene mínimo en $x = -\frac{1}{2}$ y en $x = \frac{1}{2}$ y máximo en $x = 0$.

En ocasiones, la determinación de los máximos y mínimos relativos se consigue mediante un análisis de la primera derivada.

3. *Estudiar los extremos relativos de* $f(x) = (x-2)^2(x-3)^3$, *mediante el análisis de la primera derivada.*

Nota: Este ejercicio ya ha sido resuelto anteriormente utilizando las derivadas sucesivas. Ahora se va a tratar con la ayuda única de la primera derivada.

$f'(x) = 2(x-2)(x-3)^3 + (x-2)^2 3(x-3)^2 = (x-2)(x-3)^2[2(x-3) + 3(x-2)] =$
$= (x-2)(x-3)^2(5x-12).$

$(x-2)(x-3)^2(5x-12) = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = \dfrac{12}{5}.$

Se va a *estudiar el signo de* $f'(x)$ *en un entorno de cada punto.*

En $x = 2$, se hace $x = 2 + \Delta x$:

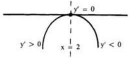
$f'(2+\Delta x) = (2+\Delta x-2)(2+\Delta x-3)^2[5(2+\Delta x)-12] = \Delta x(-1+\Delta x)^2(-2+5\Delta x).$

El segundo factor siempre es positivo, ya que es un cuadrado.

El tercer factor, para un Δx «suficientemente pequeño», es siempre negativo.

El signo del primer factor depende del signo de Δx. Así pues:

	Δx	$(-1+\Delta x)^2$	$-2+5\Delta x$	$f'(2+\Delta x)$
a la izquierda de $x = 2$, $(\Delta x < 0)$	$-$	$+$	$-$	$+$
a la derecha de $x = 2$, $(\Delta x > 0)$	$+$	$+$	$-$	$-$



Por consiguiente, *la función a la izquierda es creciente (derivada positiva) y a la derecha es decreciente (derivada negativa);* por tanto:

La función tiene un **máximo relativo** en $x = 2$.

En $x = 3$, se hace $x = 3 + \Delta x$:

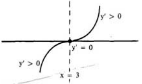
$f'(3+\Delta x) = (3+\Delta x-2)(3+\Delta x-3)^2[5(3+\Delta x)-12] = (1+\Delta x)\Delta x^2(3+5\Delta x).$

	$1+\Delta x$	Δx^2	$3+5\Delta x$	$f'(3+\Delta x)$
a la izquierda de $x = 3$, $(\Delta x < 0)$	$+$	$+$	$+$	$+$
a la derecha de $x = 3$, $(\Delta x > 0)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Tomando un x «suficientemente pequeño», resulta que, *tanto a la izquierda como a la derecha, la función es creciente (derivada positiva);* por tanto:

En $x = 3$ hay un **punto de inflexión** con tangente horizontal.

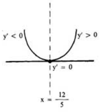
Nota: Es *con tangente horizontal*, ya que $f'(3) = 0$.



En $x = \dfrac{12}{5}$, se hace $x = \dfrac{12}{5} + \Delta x$:

$$f'\left(\frac{12}{5}+\Delta x\right) = \left(\frac{12}{5}+\Delta x-2\right)\left(\frac{12}{5}+\Delta x-3\right)^2\left[5\left(\frac{12}{5}+\Delta x\right)-12\right] =$$
$$= \left(\frac{2}{5}+\Delta x\right)\left(-\frac{3}{5}+\Delta x\right)^2 5\Delta x.$$

	$\frac{2}{5} + \Delta x$	$\left(-\frac{3}{5} + \Delta x\right)^2$	$5\Delta x$	$f'\left(\frac{12}{5} + \Delta x\right)$
$\Delta x < 0$	+	+	−	−
$\Delta x > 0$	+	+	+	+



Para x «suficientemente pequeño» se tiene que *a la izquierda es decreciente (derivada negativa) y a la derecha es creciente (derivada positiva);* por tanto:

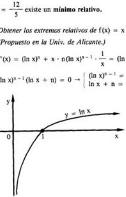
En $x = \frac{12}{5}$ existe un **mínimo relativo.**

4. *Obtener los extremos relativos de* $f(x) = x \cdot (\ln x)^n$, $(n \in N^*)$.

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

$$f'(x) = (\ln x)^n + x \cdot n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} = (\ln x)^n + n(\ln x)^{n-1} = (\ln x)^{n-1}(\ln x + n).$$

$$(\ln x)^{n-1}(\ln x + n) = 0 \rightarrow \begin{cases} (\ln x)^{n-1} = 0 \rightarrow \ln x = 0; \\ \ln x + n = 0 \rightarrow \ln x = -n. \end{cases}$$



- De la primera ecuación: $\ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1$. El comportamiento en este punto se hace estudiando en $x = 1 + \Delta x$. (En la figura adjunta se ha representado $y = \ln x$.)

A la izquierda de $x = 1$, $\ln(1 + \Delta x)$ es negativo y a la derecha, positivo; el signo de $[\ln(1 + \Delta x)]^{n-1}$ depende de que el exponente sea *par* o *impar*. Por el contrario, para un Δx «suficientemente pequeño», $\ln(1 + \Delta x) + n$ siempre es positivo. Por tanto:

		$[\ln(1 + \Delta x)]^{n-1}$	$\ln(1 + \Delta x) + n$	$f'(1 + \Delta x)$
si n es par, n − 1 es impar	$\Delta x < 0$	−	+	−
	$\Delta x > 0$	+	+	+
si n es impar, n − 1 es par	$\Delta x < 0$	+	+	+
	$\Delta x > 0$	+	+	+

Por tanto, si n es par, en x = 1 existe un **mínimo relativo** (ya que pasa de ser decreciente a ser creciente); si n es impar, en x = 1 hay un **punto de inflexión** con tangente horizontal [dado que no hay cambio de signo en f′)].

- De la segunda ecuación: $\ln x = -n \rightarrow x = \frac{1}{e^n}$.

Haciendo $x = \frac{1}{e^n} + \Delta x$, resulta en la derivada:

$$f'\left(\frac{1}{e^n} + \Delta x\right) = \left[\ln\left(\frac{1}{e^n} + \Delta x\right)\right]^{n-1}\left[\ln\left(\frac{1}{e^n} + \Delta x\right) + n\right],$$

que proporciona la discusión siguiente:

		$\left[\ln\left(\frac{1}{e^n}+\Delta x\right)\right]^{n-1}$	$\ln\left(\frac{1}{e^n}+\Delta x\right)+n$	$f'\left(\frac{1}{e^n}+\Delta x\right)$
si n es par, n − 1 es impar	a la izquierda, $\Delta x < 0$	−	−	+
	a la derecha, $\Delta x > 0$	−	+	−
si n es impar, n − 1 es par	a la izquierda, $\Delta x < 0$	+	−	−
	a la derecha, $\Delta x > 0$	+	+	+

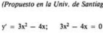
En $x = \frac{1}{e^n}$ existe un **máximo** si n es par y un **mínimo** si n es impar.

5. *Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

$$y' = 3x^2 - 4x; \quad 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(3x-4) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \rightarrow x_1 = 0; \\ 3x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Basta estudiar la función en los intervalos $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.



	x	3x − 4	y' = x(3x − 4)
$-\infty < x < 0$	−	−	+
$0 < x < \frac{4}{3}$	+	−	−
$\frac{4}{3} < x < +\infty$	+	+	+

La función $y = x^3 - 2x^2 + 1$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

6. *Hallar los valores de* t *que hacen que* $f(x) = x^4 + 2x^3 + tx^2 + x + 1$ *sea siempre cóncava.*

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

El problema se reduce a determinar los valores de t que hacen a $f''(x)$ positiva en todo intervalo real.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2tx + 1 \rightarrow f''(x) = 12x^2 + 12x + 2t.$$

Ahora bien, para que el trinomio $12x^2 + 12x + 2t$ tenga signo positivo, basta que *sus raíces sean imaginarias*, es decir, que el discriminante sea negativo:

$$12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2t < 0; \quad 144 - 96t < 0 \rightarrow t > \frac{144}{96} = \frac{3}{2}.$$

Luego, para $t \geq \frac{3}{2}$, $f''(x)$ será siempre positiva (o nula) y, por tanto, $f(x)$ será siempre **cóncava**.

Solución de los ejercicios propuestos

1. Obtener mediante desarrollos en serie de potencias los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \operatorname{sen} x}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x - 2x^2}{x(\operatorname{sen} 2x - 2x)}$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^3}{x^5}$.

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{tg} 5x}$.

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos 2x)}$.

En cada uno de los casos se sustituyen las funciones por sus desarrollos en serie. Los desarrollos que se van a utilizar son:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ (para todo } x \in R);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ (para todo } x \in R);$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \left(\text{para } |x| < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ (para todo } x \in R).$$

a) $A = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$;

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)};$$

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3x^3}{6} + \frac{15x^5}{120} + \dots}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \dots}{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \dots} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{2} = 3.$$

b) $$B = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \operatorname{sen} x};$$

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots\right)};$$

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \ldots}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{x}{12} + \ldots}{\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \ldots} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{3} = 2.$$

c) $$C = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x - 2x^2}{x(\operatorname{sen} 2x - 2x)};$$

$$C = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots\right] - 2x^2}{x\left(\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots\right] - 2x\right)};$$

$$C = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 - \ldots}{-\frac{4}{3}x^4 + \frac{4}{15}x^6 - \ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{3} + \frac{4}{45}x^2 - \ldots}{-\frac{4}{3} + \frac{4}{15}x^2 - \ldots} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

d) $$D = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x^3}{x^5};$$

$$D = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) - \frac{x^3}{2}}{x^5};$$

$$D = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{8}x^5 + \frac{273}{5\,040}x^7 + \ldots}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{8} + \frac{273}{5\,040}x^2 + \ldots}{1} = \frac{1}{8}.$$

e) $$E = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)}{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)};$$

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \ldots}{x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 - \ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x - \frac{1}{120}x^3 + \ldots}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \ldots} = \frac{0}{1} = 0.$$

f) $$F = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{tg} 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[5x - \frac{(5x)^3}{3!} + \ldots\right] - \left[3x + \frac{(3x)^3}{3} + \ldots\right]}{\left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \ldots\right] - \left[5x + \frac{(5x)^3}{3} + \ldots\right]};$$

$$F = \lim_{x \to 0} \frac{2x - \frac{179}{6}x^3 + \ldots}{-2x - \frac{277}{6}x^3 + \ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - \frac{179}{6}x^2 + \ldots}{-2 - \frac{277}{6}x^2 + \ldots} = \frac{2}{-2} = -1.$$

g) $G = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos 2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x\left(1 - \left[1 - \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} - \dots\right]\right)}$;

$$G = \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{30}x^5 + \dots}{2x^3 - \dfrac{2}{3}x^5 + \dots} = \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{30}x^2 + \dots}{2 - \dfrac{2}{3}x^2 + \dots} = \frac{-\dfrac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}.$$

2. Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

a) $y = 3x^5 - 125x^3 + 2160x$.

b) $y = 2e^x - e^{-x}$.

c) $y = x + 5 - 2\operatorname{sen} x$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

d) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

e) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 5x + 4}$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

g) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

h) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

i) $f(x) = \ln[(x - 1) \cdot (x - 2)]$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

j) $f(x) = x^5 - 5x - 1$, aprovechando el resultado para obtener el número de raíces reales de $x^5 - 5x - 1 = 0$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función $f(x)$ se halla su derivada $f'(x)$ y se calculan los puntos críticos, que son los puntos en los que existe $f'(x)$ y se anula, o bien los puntos en los que $f'(x)$ no existe [$f'(x)$ es discontinua]. Es decir, los puntos críticos son los ceros de $f'(x)$ y los puntos de discontinuidad de $f'(x)$.

Se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos críticos en la recta real. Si $f'(x)$ es positiva, la función $f(x)$ es creciente; si $f'(x)$ es negativa, la función $f(x)$ es decreciente.

a) $y = 3x^5 - 125x^3 + 2\,160x \rightarrow y' = 15x^4 - 375x^2 + 2\,160 = 15(x^4 - 25x^2 + 144)$.

$$y' = 0 \rightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -4,\ x_3 = 3,\ x_4 = -3.$$

Son puntos críticos los de abscisas -4, -3, 3 y 4.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, -3)$, $(-3, 3)$, $(3, 4)$ y $(4, +\infty)$:

x	$(-\infty, -4)$	$(-4, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
y'	+	−	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -4)$, $(-3, 3)$ y $(4, +\infty)$ y decreciente en los intervalos $(-4, -3)$ y $(3, 4)$.

b) $y = 2e^x - e^{-x} \rightarrow y' = 2e^x + e^{-x}$.

Como la función y' es mayor que cero para cualquier valor real de x, ya que los dos sumandos que la forman son positivos, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

c) $y = x + 5 - 2\operatorname{sen} x \rightarrow y' = 1 - 2\cos x$.

$$y' = 0 \rightarrow 1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \text{ para } k \in Z.$$

Son puntos críticos los de abscisas $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ y $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, para $k \in Z$.

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por dichos puntos. Los intervalos se pueden representar por $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2[k + 1]\pi\right)$.

En los intervalos $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$, para $k \in Z$, la derivada y' es mayor que cero, por lo que la función es creciente en dichos intervalos; en los intervalos $\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2[k + 1]\pi\right)$, para $k \in Z$, la derivada y' es menor que cero, por lo cual la función es decreciente en estos intervalos.

d) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8 \rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$.

$$y' = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 1.$$

Son puntos críticos los de abscisas 1 y 3.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 3)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \rightarrow$

$$\rightarrow y' = \frac{(2x - 3)(x^2 + 3x + 2) - (2x + 3)(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 + 3x + 2)^2} = \frac{6(x^2 - 2)}{(x^2 + 3x + 2)^2}.$$

Son puntos críticos los ceros de y' y los puntos de discontinuidad de y'.

- Puntos cero: $y' = 0 \rightarrow x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$.
- Puntos de discontinuidad: $x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$.

Por tanto, son puntos críticos los de abscisas $-2, -\sqrt{2}, -1$ y $\sqrt{2}$.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -1), (-1, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, +\infty)$:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, -1)$	$(-1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
y'	+	+	−	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, -\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, +\infty)$ y decreciente en los intervalos $(-\sqrt{2}, -1)$ y $(-1, \sqrt{2})$.

f) La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 - 5x + 4}$ equivale a $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}, \text{ si } x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, \text{ si } x = 0, \\ f_2(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$

Se calculan los puntos críticos de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

1) $f_1'(x) = \dfrac{(2x+3)(x^2-5x+4) - (2x-5)(x^2+3x+2)}{(x^2-5x+4)^2} = \dfrac{-8x^2 + 4x + 22}{(x^2 - 5x + 4)^2}$, si $x < 0$.

Son puntos críticos los ceros de $f_1'(x)$ y los puntos de discontinuidad de $f_1'(x)$.

- Puntos cero: $f_1'(x) = 0 \rightarrow -2(4x^2 - 2x - 11) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 176}}{8} = \frac{2 \pm 6\sqrt{5}}{8} \rightarrow x_1 = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 1{,}927;$$

$$x_2 = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4} \approx -1{,}427.$$

Como $x_1 > 0$, no pertenece al dominio de definición de $f_1'(x)$.

- Puntos de discontinuidad: $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1.$$

Al ser $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, no pertenecen al dominio de definición de $f_1'(x)$.

2) Si $x > 0$, $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)} = \dfrac{x-2}{x-4} \rightarrow$

$$\rightarrow f_2'(x) = \frac{(x-4) - (x-2)}{(x-4)^2} = \frac{-2}{(x-4)^2}, \text{ si } x > 0.$$

Son puntos críticos los ceros de $f_2'(x)$ y los puntos de discontinuidad de $f_2'(x)$.

- Puntos cero: no existen, ya que $-2 \neq 0$.
- Puntos de discontinuidad: $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$.

Como $f'(0)$ no existe $\left[\text{a la izquierda de cero la derivada es } f'(0)^- = \frac{22}{16} = \frac{11}{8} \text{ y a la derecha de cero la derivada es } f'(0)^+ = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}\right]$, son puntos críticos los de abscisas $\frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}$, 0 y 4.

Se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}\right)$, $\left(\frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}, 0\right)$, (0, 4) y $(4, +\infty)$:

x	$\left(-\infty, \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}\right)$	$\left(\frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}, 0\right)$	(0, 4)	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$

La función es decreciente en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}\right)$, (0, 4) y $(4, +\infty)$ y creciente en el intervalo $\left(\frac{1 - 3\sqrt{5}}{4}, 0\right)$.

g) $f(x) = \text{arc sen } \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot x}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1 + x^2}}};$

$$f'(x) = \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + x^2 - x^2}{1 + x^2}}} = \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Como la función $f'(x)$ es mayor que cero para cualquier valor real de x, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Nota: La derivada obtenida indica que $f(x) = \text{arc sen } \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \text{arc tg } x$.

En efecto, si se hace $x = \text{tg } u \left(\text{para } -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene:

$$f(x) = \text{arc sen } \frac{\text{tg } u}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 u}} = \text{arc sen } \frac{\frac{\text{sen } u}{\cos u}}{\sqrt{1 + \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u}}} = \text{arc sen } \frac{\frac{\text{sen } u}{\cos u}}{\sqrt{\frac{\cos^2 u + \text{sen}^2 u}{\cos^2 u}}};$$

$$f(x) = \text{arc sen } \frac{\frac{\text{sen } u}{\cos u}}{\frac{1}{\cos u}} = \text{arc sen}(\text{sen } u) = u = \text{arc tg } x.$$

h) $f(x) = \text{sen } x + \cos x \rightarrow f'(x) = \cos x - \text{sen } x.$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x - \text{sen } x = 0 \rightarrow \cos x = \text{sen } x \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \text{ para } k \in Z.$$

Son puntos críticos los de abscisas $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ y $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, para $k \in Z$.

Se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por dichos puntos. Los intervalos pueden representarse por $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2[k + 1]\pi\right)$.

En los intervalos $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, para $k \in Z$, la derivada $f'(x)$ es menor que cero, por lo que la función es decreciente en estos intervalos; en los intervalos $\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2[k + 1]\pi\right)$, para $k \in Z$, la derivada $f'(x)$ es mayor que cero, por lo cual la función es creciente en dichos intervalos.

i) $f(x) = \ln[(x - 1) \cdot (x - 2)] = \ln(x^2 - 3x + 2) \rightarrow f'(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

La función $f(x)$ está definida para los valores de x que hacen $(x - 1) \cdot (x - 2) > 0$; es decir, está definida en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, \infty)$.

Son puntos críticos los ceros de $f'(x)$ y los puntos de discontinuidad de $f'(x)$.

- Puntos cero: $f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

  Como $x \in [1, 2]$, intervalo en el que no está definida $f(x)$, el punto de abscisa $\frac{3}{2}$ no es punto crítico de $f(x)$.

- Puntos de discontinuidad: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1$.

Por tanto, son puntos críticos los de abscisas 1 y 2.

Se estudia el signo de $f'(x)$ sólo en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$, ya que en el intervalo $[1, 2]$ no está definida $f(x)$:

x	$(-\infty, 1)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

j) $f(x) = x^5 - 5x - 1 \rightarrow f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) =$

$= 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$.

$f'(x) = 0 \rightarrow (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$.

Son puntos críticos los de abscisas -1 y 1.

Se estudia el signo de $f'(x)$ en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

El número de raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ es exactamente tres. En efecto, dando valores a x en $f(x)$, se tiene:

$$f(-2) = -23 < 0; \quad f(-1) = 3 > 0; \quad f(1) = -5 < 0; \quad f(2) = 21 > 0.$$

Como la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, -1]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto x_1, interior al intervalo $(-2, -1)$, $x_1 \in (-2, -1)$, en el que el valor de $f(x)$ es cero, $f(x_1) = 0$; además, es punto único por ser $f(x)$ creciente en dicho intervalo. Es decir, x_1 es raíz real de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $(-2, -1)$.

Idéntico razonamiento permite comprobar que existe un punto x_2, interior al intervalo $(-1, 1)$, $x_2 \in (-1, 1)$, y un punto x_3, interior al intervalo $(1, 2)$, $x_3 \in (1, 2)$, en los que el valor de $f(x)$ es cero, $f(x_2) = f(x_3) = 0$; además, cada uno de los puntos es único en el correspondiente intervalo por ser $f(x)$ decreciente en $(-1, 1)$ y creciente en $(1, 2)$. Así pues, x_2 y x_3 son, respectivamente, raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ en los intervalos $(-1, 1)$ y $(1, 2)$.

En el intervalo $(-\infty, -2]$ no existe ninguna raíz de la ecuación $f(x) = 0$, ya que los valores de la función $f(x)$ en todos los puntos de ese intervalo son menores que $f(-2) = -23$, por ser la función creciente en dicho intervalo.

Análogamente, en el intervalo $[2, +\infty)$ tampoco existe ninguna raíz de la ecuación $f(x) = 0$, porque los valores de la función $f(x)$ en todos los puntos de ese intervalo son mayores que $f(2) = 21$, por ser la función creciente en dicho intervalo.

Por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales.

3. Obtener los intervalos de concavidad y de convexidad de las funciones:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 1$.

b) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x + 1$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

c) $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x - 2)^3$.

d) $f(x) = 2x^2 + \ln x$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad de una función $f(x)$ se halla su derivada segunda $f''(x)$ y se procede con ella de forma similar a la seguida con su primera derivada $f'(x)$ para los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Los puntos que delimitan los diversos intervalos son las raíces de la ecuación $f''(x) = 0$ y los puntos de discontinuidad de $f''(x)$.

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los distintos intervalos. Si $f''(x)$ es positiva, la función $f(x)$ es cóncava hacia $+y$ (cóncava); si $f''(x)$ es negativa, la función es cóncava hacia $-y$ (convexa).

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 5 \rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

$f''(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$.

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$:

x	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava en el intervalo $(2, +\infty)$.

b) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x + 1 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 5 \rightarrow$

$$\rightarrow f''(x) = 12x^2 - 36x + 24.$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(x^2 - 3x + 2) = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1.$$

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

La función es cóncava en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(1, 2)$.

c) $f(x) = (x-1)^2(x-2)^3 \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = 2(x-1)(x-2)^3 + 3(x-2)^2(x-1)^2 = (x-1)(x-2)^2[2(x-2)+3(x-1)];$

$f'(x) = (x-1)(x-2)^2(5x-7) \rightarrow$

$\rightarrow f''(x) = (x-2)^2(5x-7) + 2(x-2)(x-1)(5x-7) + 5(x-1)(x-2)^2;$

$f''(x) = (x-2)[(x-2)(5x-7) + 2(x-1)(5x-7) + 5(x-1)(x-2)];$

$f''(x) = (x-2)[(5x^2-17x+14) + (10x^2-24x+14) + (5x^2-15x+10)];$

$f''(x) = (x-2)(20x^2-56x+38).$

$f''(x) = 0 \rightarrow 2(x-2)(10x^2-28x+19) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x_1 = 2,\ x = \frac{28 \pm \sqrt{784-760}}{20} = \frac{28 \pm 2\sqrt{6}}{20} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = \frac{14+\sqrt{6}}{10} \approx 1{,}645;\ x_3 = \frac{14-\sqrt{6}}{10} \approx 1{,}155.$$

Se estudia el signo de $f''(x)$ en los intervalos $\left(-\infty, \frac{14-\sqrt{6}}{10}\right)$, $\left(\frac{14-\sqrt{6}}{10}, \frac{14+\sqrt{6}}{10}\right)$, $\left(\frac{14+\sqrt{6}}{10}, 2\right)$ y $(2, +\infty)$:

x	$\left(-\infty, \frac{14-\sqrt{6}}{10}\right)$	$\left(\frac{14-\sqrt{6}}{10}, \frac{14+\sqrt{6}}{10}\right)$	$\left(\frac{14+\sqrt{6}}{10}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	−	+	−	+

La función es convexa en los intervalos $\left(-\infty, \frac{14-\sqrt{6}}{10}\right)$ y $\left(\frac{14+\sqrt{6}}{10}, 2\right)$ y cóncava en los intervalos $\left(\frac{14-\sqrt{6}}{10}, \frac{14+\sqrt{6}}{10}\right)$ y $(2, +\infty)$.

Se podría resolver el ejercicio escribiendo la función $f(x)$ realizada la multiplicación. Es decir:

$f(x) = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8 \rightarrow f'(x) = 5x^4 - 32x^3 + 75x^2 - 76x + 28 \rightarrow$

$$\rightarrow f''(x) = 20x^3 - 96x^2 + 150x - 76.$$

$f''(x) = 0 \rightarrow 20x^3 - 96x^2 + 150x - 76 = 0.$

Se aplica la regla de Ruffini, ya que el polinomio es divisible por $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 20 & -96 & 150 & -76 \\ 2 & & 40 & -112 & 76 \\ \hline & 20 & -56 & 38 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $f''(x) = (x-2)(20x^2 - 56x + 38) = 2(x-2)(10x^2 - 28x + 19) = 0.$

A partir de aquí se procede como se ha hecho anteriormente.

d) $f(x) = 2x^2 + \ln x \rightarrow f'(x) = 4x + \frac{1}{x} \rightarrow f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2}.$

La función $f(x)$ está definida para los valores de $x > 0$; es decir, está definida en el intervalo $(0, +\infty)$.

$f''(x) = 0 \rightarrow 4 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow 4 = \frac{1}{x^2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}.$

Como $x_2 < 0$, no pertenece al dominio de definición de $f(x)$.

Se estudia el signo de f'' (x) sólo en los intervalos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$:

x	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
f'' (x)	−	+

La función es convexa en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

4. Obtener los extremos absolutos de las funciones siguientes, en los intervalos que se indican:

a) $y = x^5 + x + 1$, en $[0, 2]$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

b) $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$, en $[-1, 3]$.

Los extremos absolutos, máximo y mínimo, de una función f(x) en un intervalo [a, b] son, respectivamente, el mayor y el menor valor que alcanza la función en dicho intervalo. Para obtenerlos se determinan los extremos relativos de la función que pertenezcan al intervalo y se calculan los valores que toma la función en los extremos del intervalo. Si la función f(x) es continua en [a, b] su máximo (mínimo) absoluto en el intervalo [a, b] se alcanzará o en un máximo (mínimo) relativo o en alguno de los puntos, a o b, extremos del intervalo.

a) Se hallan los extremos relativos de la función:

$$y = x^5 + x + 1 \rightarrow y' = 5x^4 + 1.$$

$$y' = 0 \rightarrow 5x^4 + 1 = 0 \rightarrow x^4 = -\frac{1}{5} \rightarrow \text{ sin solución.}$$

La función no presenta extremos relativos.

En los extremos del intervalo [0, 2] los valores de la función son:

$$y(0) = 0^5 + 0 + 1 = 1; \quad y(2) = 2^5 + 2 + 1 = 35.$$

Como la función es continua, en el intervalo [0, 2] alcanza su máximo absoluto 35 en $x = 2$ y su mínimo absoluto 1 en $x = 0$.

b) Se calculan los extremos relativos de la función:

$$y = \frac{x-2}{x^2+1} \rightarrow y' = \frac{(x^2+1) - 2x(x-2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}236; \; x_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0{,}236.$$

Sólo el valor x_2 pertenece al intervalo $[-1, 3]$; el valor del correspondiente extremo relativo de la función es:

$$y(2-\sqrt{5}) = \frac{(2-\sqrt{5}) - 2}{(2-\sqrt{5})^2 + 1} = \frac{-\sqrt{5}}{10 - 4\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}(10 + 4\sqrt{5})}{100 - 80} =$$

$$= \frac{-20 - 10\sqrt{5}}{20} = \frac{-2 - \sqrt{5}}{2} \approx -2{,}118.$$

En los extremos del intervalo [−1, 3] los valores de la función son:

$$y(-1) = \frac{-1-2}{(-1)^2+1} = -\frac{3}{2}; \qquad y(3) = \frac{3-2}{3^2+1} = \frac{1}{10}.$$

Como la función es continua, en el intervalo [−1, 3] alcanza su máximo absoluto $\frac{1}{10}$ en $x = 3$ y su mínimo absoluto $\frac{-2-\sqrt{5}}{2}$ en $x = 2 - \sqrt{5}$.

5. Hallar los extremos relativos de las funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2}$.

b) $y = x \cdot e^{-x}$.

(Propuesto en la Univ. de León.)

c) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 7x - 6) \cdot e^x$.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

d) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, en $(-\pi/2, \pi/2)$.

e) $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$, en $(0, 2\pi)$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Los extremos relativos de una función f(x) corresponden a los valores de x en los que, estando definida la función f(x), su derivada f′(x) pasa de positiva a negativa (máximo) o de negativa a positiva (mínimo). En dichos valores de x se cumple que la derivada es nula, $f'(x) = 0$, o bien es discontinua.

Para determinar el carácter los extremos relativos de una función f(x) puede emplearse también el criterio de la segunda derivada f″(x) de la función. Si $f''(x) < 0$, existe máximo; si $f''(x) > 0$, hay mínimo [en ambos casos para los valores de x que anulan la derivada, $f'(x) = 0$]. Este criterio es el que se va a emplear siempre que sea posible.

a) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2} \rightarrow y' = \dfrac{(2x-5)x^2 - 2x(x^2 - 5x + 6)}{x^4} = \dfrac{5x^2 - 12x}{x^4} = \dfrac{5x - 12}{x^3}$.

$y' = 0 \rightarrow 5x - 12 = 0 \rightarrow x = \dfrac{12}{5}$.

$y'' = \dfrac{5x^3 - 3x^2(5x - 12)}{x^6} = \dfrac{-10x^3 + 36x^2}{x^6} = \dfrac{-10x + 36}{x^4}$.

Como $y''\left(\dfrac{12}{5}\right) = \dfrac{-10(12/5) + 36}{(12/5)^4} = \dfrac{12 \cdot 5^4}{12^4} = \dfrac{5^4}{12^3} > 0$, en $x = \dfrac{12}{5}$ existe mínimo, punto $\left(\dfrac{12}{5}, -\dfrac{3}{72}\right)$.

Nota: Si se hubiese utilizado el criterio de la variación de signo de la primera derivada, se hubiera encontrado que en $x = 0$ cambia de positiva a negativa, haciendo pensar que en dicho punto existe máximo, pero no es así, porque la función no está definida (no existe, es discontinua) en $x = 0$.

b) $y = x \cdot e^{-x} \rightarrow y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$.

$y' = 0 \rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$, ya que $e^{-x} > 0$ para cualquier valor de x.

$y'' = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = -e^{-x}(1 - x + 1) = -e^{-x}(2 - x).$

Al ser $y''(1) = -e^{-1}(2 - 1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e} < 0$, en $x = 1$ existe máximo, punto $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

c) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 7x - 6) \cdot e^x \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = (3x^2 - 8x + 7) \cdot e^x + (x^3 - 4x^2 + 7x - 6) \cdot e^x;$

$f'(x) = e^x \cdot (x^3 - x^2 - x + 1) = e^x \cdot (x - 1)^2 (x + 1).$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^x \cdot (x - 1)^2 (x + 1) = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ ($e^x > 0$ para cualquier valor de x).

$f''(x) = e^x \cdot (x^3 - x^2 - x + 1) + e^x \cdot (3x^2 - 2x - 1) = e^x \cdot (x^3 + 2x^2 - 3x).$

- Como $f''(1) = e^1 \cdot (1 + 2 - 3) = 0$, hay que estudiar la variación de signo de $f'(x)$ en $x = 1$:

x	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	+

En $x = 1$ la derivada $f'(x)$ no cambia de signo; por tanto, en este punto no existe extremo relativo.

- Al ser $f''(-1) = e^{-1} \cdot (-1 + 2 + 3) = 4e^{-1} > 0$, en $x = -1$ existe mínimo, punto $\left(-1, -\dfrac{18}{e}\right)$.

Nota: Para conocer si en $x = 1$ hay extremo relativo, como $f''(1) = 0$, se puede estudiar la tercera derivada $f^{3)}(x)$.

$f^{3)}(x) = e^x \cdot (x^3 + 2x^2 - 3x) + e^x \cdot (3x^2 + 4x - 3) = e^x \cdot (x^3 + 5x^2 + x - 3).$

Como $f^{3)}(1) = e^1 \cdot (1 + 5 + 1 - 3) = 4e \neq 0$, en $x = 1$ existe punto de inflexión (es decir, en dicho punto no hay extremo relativo).

d) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \rightarrow f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x.$

$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow$ en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) x = \dfrac{\pi}{4}.$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x.$

Al ser $f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$, en $x = \dfrac{\pi}{4}$ existe máximo, punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

e) $f(x) = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = 3\cos x - 3\cos 3x = 3\cos x - 3(4\cos^3 x - 3\cos x) = 12\cos x(1 - \cos^2 x) = 12\cos x \operatorname{sen}^2 x.$

$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sen}^2 x = 0 \end{cases} \rightarrow$ en $(0, 2\pi)$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{2}, x_2 = \dfrac{3\pi}{2}, \\ x_3 = \pi. \end{cases}$

$f''(x) = -3\operatorname{sen} x + 9\operatorname{sen} 3x = 3(-\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} 3x).$

- Como $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3\left(-\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} + 3\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right) = 3(-1 - 3) = -12 < 0$, en $x = \dfrac{\pi}{2}$ hay máximo, punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 4\right)$.

• Al ser $f''(\pi) = 3(-\text{sen } \pi + 3\text{sen } 3\pi) = 0$, hay que estudiar la tercera derivada $f'''(x)$.

$f'''(x) = -3\cos x + 27\cos 3x = 3(-\cos x + 9\cos 3x)$.

Como $f'''(\pi) = 3(-\cos \pi + 9\cos 3\pi) = 3(1 - 9) = -24 \neq 0$, en $x = \pi$ existe punto de inflexión (es decir, en dicho punto no hay extremo relativo).

• Al ser $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\left(-\text{sen } \frac{3\pi}{2} + 3\text{sen } \frac{9\pi}{2}\right) = 3(1 + 3) = 12 > 0$, en $x = \frac{3\pi}{2}$ existe mínimo, punto $\left(\frac{3\pi}{2}, -4\right)$.

6. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $y = |x^2 - 9|$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Se escribe la función $y = |x^2 - 9|$ descompuesta en tramos, según el signo de $x^2 - 9$. Para ello se resuelve la ecuación $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3$ y se estudia el signo de $x^2 - 9$ en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, +\infty)$:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$x^2 - 9$	+	−	+

Es decir, la función $y = |x^2 - 9|$ equivale a $y = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ si } x < -3, \\ 0, \text{ si } x = -3, \\ -x^2 + 9, \text{ si } -3 < x < 3, \\ 0, \text{ si } x = 3, \\ x^2 - 9, \text{ si } x > 3. \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} 2x, \text{ si } x < -3, \\ \text{no existe, si } x = -3, \\ -2x, \text{ si } -3 < x < 3, \\ \text{no existe, si } x = 3, \\ 2x, \text{ si } x > 3. \end{cases}$$

$y' = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$.

Como en $x = -3$ y $x = 3$ no existe y', pero sí existe y, son puntos críticos los de abscisas -3, 0 y 3.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	−	+	−	+

La función es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(0, 3)$ y creciente en los intervalos $(-3, 0)$ y $(3, +\infty)$.

En $x = -3$ y $x = 3$ existen mínimos relativos, puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$; en $x = 0$ hay máximo relativo, punto $(0, 9)$.

7. Descomponer el número 36 en dos sumandos, tales que su producto sea máximo.

Si uno de los sumandos es x, el otro es $36 - x$.

La magnitud que ha de ser máxima es el producto $p = x(36 - x) = 36x - x^2$.

Derivando respecto a x e igualando p' a cero, se obtiene:

$$p' = 36 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18.$$

Calculando p'' y sustituyendo en ella el valor de x que anula p', se deduce:

$$p'' = -2 \rightarrow p''(18) = -2 < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

Por tanto, los dos sumandos son iguales a 18.

8. Descomponer el número 36 en dos factores, tales que su suma sea mínima.

Si uno de los factores es x, el otro es $\frac{36}{x}$.

La magnitud que ha de ser mínima es la suma $s = x + \frac{36}{x}$.

Derivando respecto a x e igualando s' a cero, resulta:

$$s' = 1 - \frac{36}{x^2} = 0 \rightarrow 1 = \frac{36}{x^2} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x_1 = 6, x_2 = -6.$$

Hallando s'' y sustituyendo en ella los valores de x que anulan s', se tiene:

$$s'' = \frac{72x}{x^4} = \frac{72}{x^3} \rightarrow \begin{cases} s''(6) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3} > 0 \rightarrow \text{mínimo,} \\ s''(-6) = \frac{72}{-216} = -\frac{1}{3} < 0 \rightarrow \text{máximo.} \end{cases}$$

Los dos factores son 6 y $\frac{36}{6} = 6$; es decir, ambos son iguales.

Nota: Obsérvese que si se consideran los factores positivos, la suma mínima corresponde a la que tiene los dos sumandos iguales; en cambio, si se consideran los factores negativos, la suma cuyos sumandos son iguales es la suma máxima.

9. Descomponer el número 36 en dos sumandos, tales que el doble del cuadrado del primero más tres veces el cuadrado del segundo sea mínimo.

Si uno de los sumandos es x, el otro es $36 - x$.

La magnitud que ha de ser mínima es la suma $s = 2x^2 + 3(36 - x)^2$.

Derivando respecto a x e igualando s' a cero, se obtiene:

$$s' = 4x - 6(36 - x) = 10x - 216 = 0 \rightarrow 10x = 216 \rightarrow x = \frac{216}{10} = \frac{108}{5}.$$

Calculando s'' y sustituyendo en ella el valor de x que anula s', resulta:

$$s'' = 10 \rightarrow s''\left(\frac{108}{5}\right) = 10 > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

Los dos sumandos son $\frac{108}{5}$ y $36 - \frac{108}{5} = \frac{180 - 108}{5} = \frac{72}{5}$.

10. Determinar los puntos de $y^2 = 4x$, tales que su distancia al punto P(4, 0) sea mínima.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

Sean (x, y) los puntos pedidos.

La magnitud que ha de ser mínima es la distancia d al punto P(4, 0). Para que tal distancia sea mínima debe ser mínimo el cuadrado de ella. Es decir, la magnitud que debe ser mínima es

$$d^2 = D = (x - 4)^2 + y^2 = (x^2 - 8x + 16) + 4x = x^2 - 4x + 16.$$

Derivando respecto a x e igualando D' a cero, se deduce:

$$D' = 2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2.$$

Hallando D'' y sustituyendo en ella el valor que anula D', se tiene:

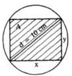
$$D'' = 2 \rightarrow D''(2) = 2 > 0 \rightarrow \text{mínimo}.$$

Los puntos pedidos son $(2, 2\sqrt{2})$ y $(2, -2\sqrt{2})$.

11. De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 5 cm, ¿cuál tiene área máxima?

Sean x e y los lados del rectángulo; su diagonal coincide con el diámetro de la circunferencia, d = 10 cm. Aplicando, pues, el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}.$$



La magnitud que ha de ser máxima es el área del rectángulo, $A = x \cdot y$. Por tanto:

$$A = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{x^2(100 - x^2)};$$

$$A = \sqrt{100x^2 - x^4}.$$

Derivando respecto a x e igualando A' a cero, resulta:

$$A' = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \rightarrow 100 - 2x^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 50 \rightarrow x_1 = +5\sqrt{2}, x_2 = -5\sqrt{2}.$$

Solamente es válida la solución x_1, ya que una longitud debe ser positiva.

Calculando A'' y sustituyendo en ella el valor $x_1 = +5\sqrt{2}$, se deduce:

$$A'' = \frac{-4x\sqrt{100 - x^2} + \dfrac{2x(100 - 2x^2)}{2\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2} = \frac{-4x(100 - x^2) + x(100 - 2x^2)}{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2x^3 - 300x}{(100 - x^2)^{3/2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow A''(+5\sqrt{2}) = \frac{2(+5\sqrt{2})^3 - 300(+5\sqrt{2})}{(100 - 50)^{3/2}} = \frac{+500\sqrt{2} - 1\,500\sqrt{2}}{+250\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-1\,000\sqrt{2}}{+250\sqrt{2}} = -4 < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

Los lados del rectángulo son $x = 5\sqrt{2}$ cm e $y = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm; se trata, pues, de un cuadrado.

12. De todos los rectángulos de perímetro 20 m, ¿cuál tiene área máxima?

Sean x e y los lados del rectángulo; como su perímetro mide 20 m, $x + y = 10$ m.

La magnitud que debe ser máxima es el área del rectángulo $A = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$.

Derivando respecto a x e igualando A' a cero, se obtiene:

$$A' = 10 - 2x = 0 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5.$$

Hallando A'' y sustituyendo en ella el valor que anula A', resulta:

$$A'' = -2 \rightarrow A''(5) = -2 < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

Las dimensiones del rectángulo son x = 5 m e y = (10 − 5) m = 5 m; por tanto, es un cuadrado.

13. De los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 5 dm, ¿cuál es el de perímetro máximo?

Sean x e y los lados del rectángulo; su diagonal es igual al diámetro de la circunferencia (véase la figura del ejercicio **11**), d = 10 dm. Aplicando, por tanto, el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}.$$

La magnitud que ha de ser máxima es el perímetro del rectángulo p = 2(x + y). Es decir:

$$p = 2(x + \sqrt{100 - x^2}) = 2x + 2\sqrt{100 - x^2}.$$

Derivando respecto a x e igualando p′ a cero, se deduce:

$$p' = 2 - \frac{4x}{2\sqrt{100 - x^2}} = 2 - \frac{2x}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2\sqrt{100 - x^2} - 2x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\sqrt{100 - x^2} - 2x = 0 \rightarrow \sqrt{100 - x^2} = x \rightarrow 100 - x^2 = x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 50 \rightarrow x_1 + 5\sqrt{2}, x_2 = -5\sqrt{2}.$$

Es válida sólo la solución x_1, porque es una longitud y debe ser positiva.

Calculando p″ y sustituyendo en ella el valor $x_1 = +5\sqrt{2}$, resulta:

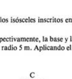
$$p'' = -\frac{2\sqrt{100 - x^2} + \dfrac{4x^2}{2\sqrt{100 - x^2}}}{100 - x^2} = -\frac{2(100 - x^2) + 2x^2}{(100 - x^2)\sqrt{100 - x^2}} = -\frac{200}{(100 - x^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow p''(+5\sqrt{2}) = -\frac{200}{(100 - 50)^{3/2}} = -\frac{200}{+250\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{10} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

Los lados del rectángulo son $x = 5\sqrt{2}$ dm e $y = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ dm; es decir, se trata de un cuadrado.

14. De los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia de radio 5 m, ¿cuál es el de área máxima?

Sean x e y, respectivamente, la base y la altura del triángulo isósceles pedido ABC, inscrito en una circunferencia de radio 5 m. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AOH de la figura, se tiene:



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 - 10y + 25 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 4y^2 - 40y = 0 \rightarrow x = 2\sqrt{10y - y^2}.$$

La magnitud que ha de ser máxima es el área del triángulo $A = \dfrac{x \cdot y}{2}$. Así pues:

$$A = y \cdot \sqrt{10y - y^2} = \sqrt{y^2(10y - y^2)} = \sqrt{10y^3 - y^4}.$$

Derivando respecto a y e igualando A′ a cero, se deduce:

$$A' = \frac{30y^2 - 4y^3}{2\sqrt{10y^3 - y^4}} = \frac{15y^2 - 2y^3}{\sqrt{10y^3 - y^4}} = 0 \rightarrow y^2(15 - 2y) = 0 \rightarrow y_1 = 0, y_2 = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

La solución y_1 no es válida, ya que la altura del triángulo no puede ser nula (no existiría el triángulo y el área sería, por supuesto, mínima).

Como el cálculo de A″ es laborioso, para averiguar si y = 7,5 hace que el área del triángulo sea máxima se halla el signo de A′ para dos valores de y próximos a 7,5, uno por la izquierda (7) y otro por la derecha (8):

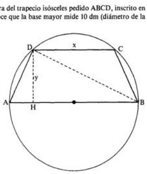
$$A'(7) = \frac{15 \cdot 7^2 - 2 \cdot 7^3}{\sqrt{10 \cdot 7^3 - 7^4}} \approx \frac{49}{32} \approx 1{,}53 > 0; \qquad A'(8) = \frac{15 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3}{\sqrt{10 \cdot 8^3 - 8^4}} = \frac{-64}{32} = -2 < 0.$$

Al pasar A′ de positiva a negativa, existe máximo para y = 7,5.

Las dimensiones del triángulo son $x = 2\sqrt{75 - 7{,}5^2} \approx 4{,}33$ m e y = 7,5 m.

15. De los trapecios isósceles inscritos en un circunferencia de radio 5 dm, ¿cuál es el de área máxima? Se conoce que su base mayor es un diámetro de la circunferencia.

Sean x e y, respectivamente, la base menor y la altura del trapecio isósceles pedido ABCD, inscrito en una circunferencia de radio 5 dm, y del que se conoce que la base mayor mide 10 dm (diámetro de la circunferencia).



En la figura adjunta se observa que los segmentos AH y HB miden:

$$AH = \frac{10 - x}{2};$$

$$HB = AB - AH =$$

$$= 10 - \frac{10 - x}{2} = \frac{20 - 10 + x}{2} = \frac{10 + x}{2}.$$

Aplicando el teorema de la altura en el triángulo rectángulo ADB, se tiene:

$$\frac{y}{AH} = \frac{HB}{y} \rightarrow y^2 = \frac{10 - x}{2} \cdot \frac{10 + x}{2} =$$

$$= \frac{100 - x^2}{4} \rightarrow y = \frac{\sqrt{100 - x^2}}{2}.$$

La magnitud que debe ser máxima es el área del trapecio $A = \frac{10 + x}{2} \cdot y$. Es decir:

$$A = \frac{10 + x}{2} \cdot \frac{\sqrt{100 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{-x^3 - 10x^2 + 100x + 1\,000}}{4}.$$

Derivando respecto a x e igualando A′ a cero, resulta:

$$A' = \frac{-3x^2 - 20x + 100}{8\sqrt{-x^3 - 10x^2 + 100x + 1\,000}} = 0 \rightarrow 3x^2 + 20x - 100 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1\,200}}{6} \rightarrow x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = -10.$$

La solución x_2 no es válida, ya que la base (menor) del trapecio es una longitud y ha de ser positiva.

Como el cálculo de A″ entraña cierta dificultad, para averiguar si $x = \frac{10}{3}$ hace que el área del trapecio sea máxima se determina el signo de A′ para dos valores de x próximos a $\frac{10}{3}$, uno por la izquierda (3) y otro por la derecha (4):

$$A'(3) = \frac{-3 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 + 100}{8\sqrt{-3^3 - 10 \cdot 3^2 + 100 \cdot 3 + 1\,000}} \approx \frac{13}{275{,}16} > 0;$$

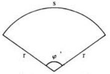
$$A'(4) = \frac{-3 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4 + 100}{8\sqrt{-4^3 - 10 \cdot 4^2 + 100 \cdot 4 + 1\,000}} \approx \frac{-28}{274{,}34} < 0;$$

Al pasar A' de positiva a negativa, existe máximo para $x = \frac{10}{3}$.

Las dimensiones del trapecio son $x = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ dm e $y = \frac{\sqrt{100 - (10/3)^2}}{2} \approx 4{,}71$ dm.

16. De todos los sectores de área 1 m², ¿cuál es el de perímetro mínimo?

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)



Sean s, r y φ, respectivamente, el arco del sector, el radio del círculo al que pertenece el sector y la amplitud (en radianes) del sector. Como arco = ángulo (rad) · radio, $s = \varphi \cdot r \rightarrow \varphi = \frac{s}{r}$, el área del sector es:

$$A = \frac{\varphi \cdot r^2}{2} = \frac{s \cdot r^2}{2r} = \frac{s \cdot r}{2} = 1 \rightarrow s = \frac{2}{r}.$$

La magnitud que debe ser mínima es el perímetro del sector $p = 2r + s = 2r + \frac{2}{r}$.

Derivando respecto a r e igualando p' a cero, se tiene:

$$p' = 2 - \frac{2}{r^2} = 0 \rightarrow 2 = \frac{2}{r^2} \rightarrow r^2 = 1 \rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1.$$

Solamente es válida la solución r_1, ya que es una longitud y ha de ser positiva.

Hallando p" y sustituyendo en ella el valor que anula p', se deduce:

$$p'' = \frac{4r}{r^4} = \frac{4}{r^3} \rightarrow p''(1) = \frac{4}{1^3} = 4 > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

Las medidas del sector son r = 1 m, $s = \frac{2}{r} = 2$ m y $\varphi = \frac{s}{r} = 2$ rad.

17. En una esfera de radio 5 dm se inscribe un cono. ¿Cuáles serán sus dimensiones para que sea el de mayor volumen?

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

Sean r y h, respectivamente, el radio y la altura del cono; el radio de la esfera es R = 5 dm.

La magnitud que debe ser máxima es el volumen del cono $V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OHB, resulta:

$$r^2 + (h - 5)^2 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 + h^2 - 10h + 25 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 + h^2 - 10h = 0 \rightarrow r^2 = 10h - h^2.$$

Por tanto:

$$V = \frac{\pi}{3}(10h - h^2)\,h = \frac{\pi}{3}(10h^2 - h^3).$$

Derivando respecto a h e igualando V' a cero, se obtiene:

$$V' = \frac{\pi}{3}(20h - 3h^2) = 0 \rightarrow h(20 - 3h) = 0 \rightarrow h_1 = 0, h_2 = \frac{20}{3}.$$

La solución h_1 no es válida, porque la altura del cono no puede ser nula (no existiría el cono y el volumen sería, por supuesto, mínimo).

Calculando V" y sustituyendo en ella el valor que anula V', se deduce:

$$V'' = \frac{\pi}{3}(20 - 6h) \rightarrow V''\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(20 - \frac{120}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(-20) = -\frac{20\pi}{3} < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

Las dimensiones del cono son:

$$h = \frac{20}{3} \approx 6{,}67 \text{ dm y } r = \sqrt{\frac{200}{3} - \frac{400}{9}} = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \approx 4{,}71 \text{ dm.}$$

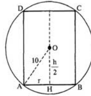
18. De los cilindros inscritos en una esfera de radio 10 cm, ¿cuál es el de mayor volumen?

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

Sean r y h, respectivamente, el radio y la altura del cilindro; el radio de la esfera es R = 10 cm.

La magnitud que ha de ser máxima es el volumen del cilindro $V = \pi r^2 \cdot h$.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OHA, se tiene:



$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 100 \rightarrow r^2 + \frac{h^2}{4} = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^2 = 100 - \frac{h^2}{4}.$$

Por tanto:

$$V = \pi\left(100 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(100h - \frac{h^3}{4}\right).$$

Derivando respecto a h e igualando V' a cero, se deduce:

$$V' = \pi\left(100 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \rightarrow 100 = \frac{3h^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{400}{3} \rightarrow h_1 = \frac{20\sqrt{3}}{3}, h_2 = -\frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

Sólo es válida la solución h_1, ya que se trata de una longitud y tiene que ser positiva.

Hallando V" y sustituyendo en ella el valor que anula V', resulta:

$$V'' = \pi\left(-\frac{6h}{4}\right) = -\frac{3}{2}\pi h \rightarrow V''\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{2}\pi\frac{20\sqrt{3}}{3} = -10\sqrt{3}\pi < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

Las dimensiones del cilindro son:

$$h = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}55 \text{ cm y } r = \sqrt{100 - \frac{100}{3}} = \sqrt{\frac{200}{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3} \approx 8{,}16 \text{ cm.}$$

19. De todos los cilindros de área total 4π cm², ¿cuál es el de volumen máximo?

Sean r y h, respectivamente, el radio y la altura del cilindro; el área total del cilindro es $A_t = 4\pi$ cm². Por tanto:

$$A_t = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 4\pi \rightarrow r \cdot h + r^2 = 2 \rightarrow h = \frac{2 - r^2}{r}.$$

La magnitud que debe ser máxima es el volumen del cilindro $V = \pi r^2 \cdot h$. Es decir:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{2 - r^2}{r} = \pi r(2 - r^2) = \pi(2r - r^3).$$

Derivando respecto a r e igualando V ′ a cero, se obtiene:

$$V' = \pi(2 - 3r^2) = 0 \rightarrow 2 - 3r^2 = 0 \rightarrow r^2 = \frac{2}{3} \rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}, r_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Solamente es válida la solución r_1, porque es una longitud y ha de ser positiva.

Calculando V ″ y sustituyendo en ella el valor que anula V ′, se deduce:

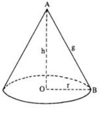
$$V'' = \pi(-6r) = -6\pi r \rightarrow V''\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{6\sqrt{6}\pi}{3} = -2\sqrt{6}\pi < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

Las dimensiones del cilindro son $r = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82$ cm y $h = \frac{2 - 6/9}{\sqrt{6}/3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}63$ cm.

20. De todos los conos de área lateral 2π dm², ¿cuál es el de volumen máximo?

Sean r, h y g, respectivamente, el radio, la altura y la generatriz del cono; el área lateral del cono es $A_\ell = \pi r \cdot g = 2\pi \text{ dm}^2 \rightarrow g = \frac{2}{r}$.

La magnitud que tiene que ser máxima es el volumen del cono $V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h$.



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AOB, se tiene:

$$r^2 + h^2 = g^2 = \frac{4}{r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow h^2 = \frac{4}{r^2} - r^2 = \frac{4 - r^4}{r^2} \rightarrow h = \frac{\sqrt{4 - r^4}}{r}.$$

Por tanto:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot \frac{\sqrt{4 - r^4}}{r} = \frac{\pi}{3} r \cdot \sqrt{4 - r^4};$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{4r^2 - r^6}.$$

Derivando respecto a r e igualando V ′ a cero, resulta:

$$V' = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8r - 6r^5}{2\sqrt{4r^2 - r^6}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4 - 3r^4}{\sqrt{4 - r^4}} = 0 \rightarrow r^4 = \frac{4}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_1 = \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx 1{,}07; \; r_2 = -\sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$

Únicamente es válida la solución r_1, ya que una longitud debe ser positiva.

Para evitar el cálculo laborioso de V″, se averigua si $r \approx 1{,}07$ hace que el volumen del cono sea máximo hallando el signo de V′ para dos valores de r próximos a 1,07, uno por la izquierda (1) y otro por la derecha (1,1):

$$V'(1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4 - 3 \cdot 1^4}{\sqrt{4 - 1^4}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} > 0;$$

$$V'(1{,}1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4 - 3 \cdot 1{,}1^4}{\sqrt{4 - 1{,}1^4}} \approx \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4 - 4{,}39}{\sqrt{4 - 1{,}46}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{-0{,}39}{\sqrt{2{,}54}} < 0.$$

Como V′ pasa de positiva a negativa, existe máximo para $r = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$.

Las dimensiones del cono son:

$$r = \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \approx 1{,}07 \text{ dm y } h = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} : \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} : \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1{,}52 \text{ dm}.$$

21. De los ortoedros de base cuadrada y área total 54 m², ¿cuál es el de volumen máximo?

Sean x e y, respectivamente, la longitud de las aristas básicas y de las aristas laterales del ortoedro; el área total del ortoedro es $A_t = 4x \cdot y + 2x^2 = 54 \rightarrow y = \frac{54 - 2x^2}{4x}$.

La magnitud que ha de ser máxima es el volumen del ortoedro $V = x^2 \cdot y$. Es decir:

$$V = x^2 \cdot \frac{54 - 2x^2}{4x} = \frac{54x - 2x^3}{4} = \frac{27x - x^3}{2}.$$

Derivando respecto a x e igualando V′ a cero, se obtiene:

$$V' = \frac{27 - 3x^2}{2} = 0 \rightarrow 27 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3.$$

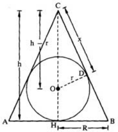
Sólo es válida la solución x_1, porque se trata de una longitud y tiene que ser positiva.

Hallando V″ y sustituyendo en ella el valor que anula V′, resulta:

$$V'' = -\frac{6x}{2} = -3x \rightarrow V''(3) = -9 < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

La longitud de las aristas del ortoedro son x = 3m e $y = \frac{54 - 18}{12} = \frac{36}{12} = 3$m; es decir, el ortoedro de volumen máximo es un cubo.

22. Obtener las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una esfera de radio r.



Sean R y h, respectivamente, el radio y la altura del cono pedido, circunscrito a una esfera de radio r.

La magnitud que debe ser mínima es el volumen del cono $V = \frac{\pi}{3} R^2 \cdot h$.

Como los triángulos CDO y CHB de la figura adjunta son semejantes (el ángulo en C es común a los dos y los ángulos en D y en H son rectos), se puede escribir:

$$\frac{OD}{CD} = \frac{HB}{CH} \rightarrow \frac{r}{x} = \frac{R}{h} \rightarrow R = \frac{r \cdot h}{x}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo CDO, se tiene:

$$x^2 = (h - r)^2 - r^2 = h^2 - 2h \cdot r \rightarrow x = \sqrt{h^2 - 2h \cdot r}.$$

Por tanto, al ser $R = \dfrac{r \cdot h}{\sqrt{h^2 - 2h \cdot r}}$, el volumen del cono es:

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2 \cdot h^3}{h^2 - 2h \cdot r} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2 \cdot h^2}{h - 2r}.$$

Derivando respecto a h e igualando V' a cero, se deduce:

$$V' = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2r^2 \cdot h(h - 2r) - r^2 \cdot h^2}{(h - 2r)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2r^2 \cdot h^2 - 4r^3 \cdot h - r^2 \cdot h^2}{(h - 2r)^2};$$

$$V' = \frac{\pi}{3} = \frac{r^2 \cdot h^2 - 4r^3 \cdot h}{(h - 2r)^2} = 0 \rightarrow r^2 \cdot h^2 - 4r^3 \cdot h = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow h(r^2 \cdot h - 4r^3) = 0 \rightarrow h_1 = 0,\ h_2 = \frac{4r^3}{r^2} = 4r.$$

La solución h_1 no es válida, ya que la altura del cono no puede ser nula (no existiría el cono).

Como el cálculo de V" presenta bastante dificultad, para averiguar si h = 4r hace que el volumen del cono sea mínimo se halla el signo de V' para dos valores de h próximos a 4r, $\left(\text{se supone } r > \dfrac{1}{4}\right)$, uno por la izquierda (4r − 1) y otro por la derecha (4r + 1):

$$V'(4r - 1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2(4r - 1)^2 - 4r^3(4r - 1)}{[(4r - 1) - 2r]^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16r^4 - 8r^3 + r^2 - 16r^4 + 4r^3}{(2r - 1)^2};$$

$$V'(4r - 1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2 - 4r^3}{(2r - 1)^2} < 0;$$

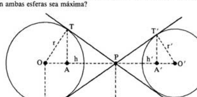
$$V'(4r + 1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2(4r + 1)^2 - 4r^3(4r + 1)}{[(4r + 1) - 2r]^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16r^4 + 8r^3 + r^2 - 16r^4 - 4r^3}{(2r + 1)^2};$$

$$V'(4r + 1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{r^2 + 4r^3}{(2r + 1)^2} > 0.$$

Al pasar V' de negativa a positiva, existe mínimo para h = 4 r.

Las dimensiones del cono son h = 4r y $R = \dfrac{4r^2}{\sqrt{16r^2 - 8r^2}} = \dfrac{4r^2}{\sqrt{8r^2}} = \dfrac{4r^2}{2r\sqrt{2}} = \dfrac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}.$

23. Dadas las esferas de radios r y r', tales que la distancia entre sus centros es d, se sitúa un punto luminoso en la línea de sus centros. ¿En qué posición habrá que situarlo para que la suma de las superficies iluminadas en ambas esferas sea máxima?



Cada superficie esférica recibe un cono de luz, de vértice el punto luminoso y con sus generatrices tangentes a la esfera correspondiente, que ilumina en cada una el área de un sector esférico. (Véase la figura anterior.)

La magnitud que ha de ser máxima es la suma de las áreas iluminadas.

Sean h y h', respectivamente, las alturas de los sectores esféricos; la suma de las áreas de ambos sectores es:

$$s = 2\pi r \cdot h + 2\pi r' \cdot h' = 2\pi(r \cdot h + r' \cdot h').$$

En la figura anterior se observa que $h = r - OA$ y que $h' = r' - A'O'$ y se conoce la distancia d entre los centros de las esferas ($d = OO'$). Llamando x la longitud $OP(PO' = d - x)$ y aplicando el teorema del cateto en los triángulos rectángulos OTP y O'T'P', resulta:

$$OT^2 = OP \cdot OA \rightarrow OA = \frac{OT^2}{OP} \rightarrow r - h = \frac{r^2}{x} \rightarrow h = r - \frac{r^2}{x};$$

$$O'T'^2 = PO' \cdot A'O' \rightarrow A'O' = \frac{O'T'^2}{PO'} \rightarrow r' - h' = \frac{r'^2}{d - x} \rightarrow h' = r' - \frac{r'^2}{d - x}.$$

Es decir, la suma de las áreas iluminadas se puede escribir:

$$s = 2\pi\left[r\left(r - \frac{r^2}{x}\right) + r'\left(r' - \frac{r'^2}{d-x}\right)\right] = 2\pi\left(r^2 - \frac{r^3}{x} + r'^2 - \frac{r'^3}{d-x}\right).$$

Derivando respecto a x e igualando a cero la derivada, $\frac{ds}{dx} = 0$, se obtiene:

$$\frac{ds}{dx} = 2\pi\left[\frac{r^3}{x^2} - \frac{r'^3}{(d-x)^2}\right] = 0 \rightarrow \frac{r^3}{x^2} = \frac{r'^3}{(d-x)^2} \rightarrow \frac{(d-x)^2}{x^2} = \frac{r'^3}{r^3} = \left(\frac{r'}{r}\right)^3.$$

Como x y d − x son longitudinales, deben ser positivos; por tanto:

$$\frac{d-x}{x} = \sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3} \rightarrow \frac{d}{x} - 1 = \sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3} \rightarrow \frac{d}{x} = 1 + \sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3} \rightarrow x = \frac{d}{1 + \sqrt{(r'/r)^3}}.$$

Calculando la segunda derivada $\frac{d^2 s}{dx^2}$ y sustituyendo en ella el valor que anula la primera derivada $\frac{ds}{dx}$, se deduce:

$$\frac{d^2s}{dx^2} = 2\pi\left[-\frac{2r^3 x}{x^4} - \frac{2r'^3(d-x)}{(d-x)^4}\right] = -2\pi\left[\frac{2r^3}{x^3} + \frac{2r'^3}{(d-x)^3}\right];$$

el valor de esta derivada segunda para $x = \frac{d}{1 + \sqrt{(r'/r)^3}}$ es negativo, porque x^3 y $(d - x)^3$ son positivos por ser los cubos de las longitudes x y d − x.

Es decir, el punto luminoso hay que situarlo a una distancia $x = \frac{d}{1 + \sqrt{(r'/r)^3}}$ del centro de la esfera cuyo radio es r.

24. Sabiendo que el precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso, demostrar que al partirlo en dos trozos la depreciación es máxima si son iguales.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Sean p y k, respectivamente, el peso del diamante entero y la constante de proporcionalidad entre el precio y el peso.

La magnitud que debe ser máxima es la depreciación que experimenta el diamante al partirlo en dos trozos. Si uno de los trozos pesa x, el otro pesa p − x.

La depreciación d en tal caso es:

$$d = k \cdot p^2 - [k \cdot x^2 + k \cdot (p - x)^2] = k[p^2 - x^2 - (p - x)^2] = k(2px - 2x^2).$$

Derivando respecto a x e igualando d′ a cero, se tiene:

$$d' = k(2p - 4x) = 2k(p - 2x) = 0 \rightarrow p = 2x \rightarrow x = \frac{p}{2}.$$

Hallando d″ y sustituyendo en ella el valor que anula d′, resulta:

$$d'' = 2k(-2) = -4k \rightarrow d''\left(\frac{p}{2}\right) = -4k < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

Por tanto, la depreciación es máxima cuando los trozos pesan $\frac{p}{2}$ y $p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$; es decir, si los trozos son iguales.

25. Si la función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = f''(a) = 0$, ¿puede presentar f un máximo relativo en el punto a? Razonar la respuesta. En caso afirmativo, mostrar un ejemplo.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Al ser $f'(a) = 0$, la función $f(x)$ puede presentar en el punto $x = a$ un extremo (en este caso máximo) relativo; pero por ser $f''(a) = 0$, también puede tener en $x = a$ un punto de inflexión.

El que sea extremo (máximo) relativo o punto de inflexión depende del valor en $x = a$ de las siguientes derivadas sucesivas. Si la primera derivada sucesiva no nula en $x = a$ es $f^{(n}(a)$, según que n sea par o impar, se tiene:

- Si n es impar: la función $f(x)$ presenta en $x = a$ un punto de inflexión (con tangente horizontal).
- Si n es par: $\begin{cases} \text{cuando } f^{(n}(a) < 0\text{: la función } f(x) \text{ tiene en } x = a \text{ un máximo relativo;} \\ \text{cuando } f^{(n}(a) > 0\text{: la función } f(x) \text{ tiene en } x = a \text{ un mínimo relativo.} \end{cases}$

Así pues, para que la función $f(x)$ presente un máximo relativo en $x = a$ la primera derivada sucesiva no nula ha de ser de orden par y negativa.

Un ejemplo puede ser la función $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3$.

Calculando sus derivadas primera y segunda e igualándolas a cero, resulta:

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x^3(5x - 8) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{8}{5};$$

$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow x^2(20x - 24) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_3 = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}.$$

Ambas derivadas se anulan para $x_1 = 0$; por tanto, en dicho punto la función puede presentar un extremo (máximo o mínimo) relativo o un punto de inflexión.

Para resolver la duda se hallan las siguientes derivadas sucesivas y se determina su valor para $x_1 = 0$:

$$f^{(3}(x) = 60x^2 - 48x \rightarrow f^{(3}(0) = 0; \qquad f^{(4}(x) = 120x - 48 \rightarrow f^{(4}(0) = -48.$$

Como la primera derivada sucesiva no nula es par (es la derivada cuarta) y negativa, la función $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x = 0$.

TEMA III-3.1. — Representación gráfica de funciones

Ejercicios resueltos

1. *Representar la función* $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.
(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)

• Por ser función polinómica está definida para todo valor real de x.

• No hay simetría respecto al origen ni a ninguno de los ejes Ox, Oy.

• No tiene asíntotas por ser función polinómica. Sólo admite rama parabólica según el eje Oy: $x \to \infty$, $y \to \infty$.

• Puntos de corte con los ejes son:

Con el Ox: $\left\{\begin{array}{l} y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \\ y = 0 \end{array}\right. \to x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$; por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -6 & 9 & -4 \\ 1 & \downarrow & 1 & -5 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \to (x-1)(x^2 - 5x + 4) = 0;\ x^2 - 5x + 4 = 0 \to x = 1,\ x' = 4; \\ (x-1)(x-1)(x-4) = 0 \to x_1 = 1 \text{ (doble)},\ x_2 = 4. \end{array}$$

Son puntos de corte con el eje Ox: (1, 0) y (4, 0).

Con el Oy: $\left\{\begin{array}{l} y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \\ x = 0 \end{array}\right. \to y = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 4 \to y = -4.$

Es punto de corte con el eje Oy: (0, −4).

• De la primera derivada:

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3) = 0 \to$
$\to x_1 = 1,\ x_2 = 3;$
$f(1) = 0$ y $f(3) = -4$.

$y' > 0$ si $x < 1$; $y' < 0$ si $1 < x < 3$;
$y' > 0$ si $x > 3$.

Por tanto, (1, 0) es máximo y (3, −4) es mínimo.

En $(-\infty, 1)$ es creciente, en (1, 3) es decreciente y en $(3, +\infty)$ es creciente.

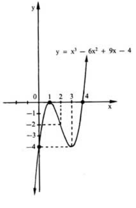
• De la segunda derivada:

$y'' = 6x - 12 = 0 \to x = 2$; $f(2) = -2$.

$y'' < 0$ si $x < 2$; $y'' > 0$ si $x > 2$.

Por tanto, (2, −2) es punto de inflexión.

Es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$.



En la figura aparece la representación gráfica de la función.

2. *Representar gráficamente la función* $y = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4}$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2.$

- La función está definida para todo valor real de x, salvo para $x = 2$ y $x = -2$.
- Es simétrica respecto al origen de coordenadas, ya que:

$$f(-x) = \frac{3(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{3x^3}{x^2 - 4} = -f(x).$$

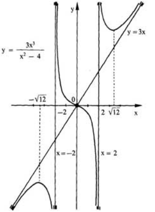
- $y \rightarrow \infty$ cuando $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = +2$ y $x = -2$ son asíntotas paralelas al eje Oy.

Como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} = \infty$, no existen asíntotas paralelas al eje Ox.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3}{(x^2 - 4)x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3}{x^3 - 4x} = 3;$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (y - 3x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3}{x^2 - 4} - 3x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 3x^3 + 12x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{12x}{x^2 - 4} = 0; \text{ por tanto, } y = 3x \text{ es asíntota oblicua.}$$



- Cortes con los ejes y con la asíntota oblicua:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4} \\ y = 3x \end{array}\right\}$$

tienen solución común $x = 0 \rightarrow (0, 0)$.

- De la primera derivada:

$$y' = \frac{9x^2(x^2 - 4) - 2x \cdot 3x^3}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 - 36x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0;$$

$$3x^4 - 36x^2 = 0 \rightarrow 3x^2(x^2 - 12) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pm\sqrt{12}.$$

- De la segunda derivada:

$$y'' = \frac{(12x^3 - 72x)(x^2 - 4)^2}{(x^2 - 4)^4} - \frac{2(x^2 - 4)2x(3x^4 - 36x^2)}{(x^2 - 4)^4};$$

que pone de manifiesto que en $x = -\sqrt{12}$ hay un máximo, en $x = +\sqrt{12}$ un mínimo y en $x = 0$ un punto de inflexión.

En la figura aparece la representación gráfica de la función.

3. *Representar gráficamente la función* $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$.
(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

- La función existe para todo valor real de x.
- Es simétrica respecto al eje Oy, ya que:

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)^2} = x^2 \cdot e^{-x^2} = f(x).$$

- No hay valor finito de x para el que el límite de y se haga infinito; por lo que no hay asíntotas paralelas al eje Oy. Calculando por la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0,$$

resulta que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- Cortes con los ejes coordenados (y con la asíntota):

$$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^{-x^2} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0^2 \cdot e^{-0} = 0; \qquad \begin{cases} y = x^2 \cdot e^{-x^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = x^2 \cdot e^{-x^2} \rightarrow x = 0.$$

El punto de corte con ambos ejes es: (0, 0).

- La primera derivada es:

$$y' = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2(-2x) \cdot e^{-x^2} = 2x(1 - x^2) \cdot e^{-x^2} = 2x(1 + x)(1 - x) \cdot e^{-x^2}.$$

De $y' = 0$ se tiene: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = +1$.

- La segunda derivada es:

$$y'' = (2 - 6x^2) \cdot e^{-x^2} + (2x - 2x^3)(-2x) \cdot e^{-x^2} = (2 - 6x^2 - 4x^2 + 4x^4) \cdot e^{-x^2} =$$
$$= (2 - 10x^2 + 4x^4) \cdot e^{-x^2}.$$

Como $f''(0) = 2 \cdot e^{-0} = 2 > 0$ y $f(0) = 0$, en (0, 0) hay un mínimo.

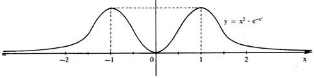
Como $f''(-1) = (2 - 10 + 4) \cdot e^{-1} = -4 \cdot e^{-1} < 0$ y $f(-1) = e^{-1}$, en $(-1, e^{-1})$ hay un máximo.

Como $f''(1) = -4 \cdot e^{-1} < 0$ y $f(1) = e^{-1}$, en $(1, e^{-1})$ hay un máximo.

De $2 - 10x^2 + 4x^4 = 0$; $2t^2 - 5t + 1 = 0$, $(x^2 = t) \rightarrow t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$;

en $x = \pm \dfrac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$ hay puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura que va a continuación:



4. *Representar gráficamente la función* $y^2 = \dfrac{x}{x-1}$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Hay que estudiar el signo de $\dfrac{x}{x-1}$ según los distintos valores de x.

Si $x < 0$, el numerador y el denominador son negativos; por tanto, su cociente es positivo. Si $x > 1$, ambos son positivos; por lo que el cociente también lo es. Sin embargo, si $0 < x < 1$, el numerador es positivo y el denominador es negativo; por tanto, el cociente es negativo.

Como $y = \pm\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$, el campo de existencia es $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$.

Nota: Obsérvese que $x = 0$ pertenece al campo y no así $x = 1$, ya que para él no existe $\dfrac{x}{x-1}$.

- La función es simétrica respecto al eje Ox, ya que:

$$(-y)^2 = \frac{x}{x-1} = y^2.$$

A continuación se estudia la rama positiva $y = +\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$. La rama negativa $y = -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ es simétrica de la positiva respecto al eje Ox.

- La recta $x = 1$ es asíntota paralela al eje Oy, puesto que $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = \infty$.

Calculando $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = 1$, resulta que la recta $y = 1$, ($y = -1$ para la rama negativa) es asíntota paralela al eje Ox.

- Anulando la primera derivada:

$$y' = \frac{(x-1)\cdot 1 - x \cdot 1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}} = \frac{-1}{2\sqrt{(x-1)^3 x}} = 0 \to -1 = 0 \text{ (lo que es falso), que}$$

indica que no hay puntos extremos relativos.

Además, como $y' < 0$ para todo valor de x, la función es decreciente en cualquier punto.

- Cortes con los ejes coordenados:

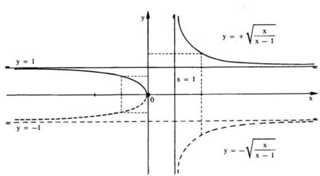
$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{x}{x-1} \\ x = 0 \end{cases} \to y = 0; \qquad \begin{cases} y^2 = \dfrac{x}{x-1} \\ y = 0 \end{cases} \to x = 0.$$

El punto de corte con ambos ejes es: (0, 0).

- Algunos valores son:

Para $x = 2 \to y = \sqrt{\dfrac{2}{2-1}} = \sqrt{2}$; para $x = -1 \to y = \sqrt{\dfrac{-1}{-1-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; ...

La gráfica de la rama positiva se dibuja con trazo continuo en la figura siguiente; la de la rama negativa es la de trazo discontinuo.



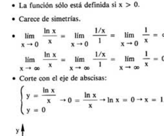
5. *Representar gráficamente la función* $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

(Propuesto en la Univ. de León y en la Univ. Complutense de Madrid.)

- La función sólo está definida si $x > 0$.
- Carece de simetrías.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1/x}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty \to x = 0$ es asíntota vertical.

  $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0 \to y = 0$ es asíntota horizontal.
- Corte con el eje de abscisas:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\ln x}{x} \\ y = 0 \end{cases} \to 0 = \dfrac{\ln x}{x} \to \ln x = 0 \to x = 1.$$ El punto de corte con el eje Ox es: (1, 0).



- Anulando la primera derivada:

$$y' = \frac{x \cdot 1/x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0;$$

$1 - \ln x = 0$; $\ln x = 1 \to x = e$ ($\approx 2{,}72$); $f(e) = 1/e (\approx 0{,}37)$.

Si $x < e$, $y' > 0$; si $x > e$, $y' < 0$; es creciente a la izquierda de $x = e$, decreciente a la derecha y tiene un máximo relativo en $(e, 1/e)$.

- Anulando la segunda derivada:

$$y'' = \frac{-1/x \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = 0;$$

$-x - 2x + 2x \ln x = 0 \to x(-3 + 2 \ln x) = 0$; $2 \ln x = 3$; $\ln x = 3/2 \to x = e^{3/2} = \sqrt{e^3}$ ($\approx 4{,}48$);

$f(\sqrt{e^3}) = \dfrac{3}{2\sqrt{e^3}}$ ($\approx 0{,}33$). El punto $\left(\sqrt{e^3}, \dfrac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$ es punto de inflexión.

• Algunos valores son:

Para $x = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2 \cdot \ln\frac{1}{2}$ ($\approx -1,39$); para $x = 2 \rightarrow y = \frac{\ln 2}{2}$ ($\approx 0,35$); ...

En la figura anterior aparece la representación gráfica de la función.

Solución de los ejercicios propuestos

Para realizar el estudio y hacer la representación gráfica de las funciones de los ejercicios que se incluyen a continuación se tienen en cuenta los siguientes puntos:

1. **Dominio de definición.**
2. **Simetrías.**
3. **Periodicidad.**
4. **Continuidad.**
5. **Ramas parabólicas. Asíntotas.**
6. **Puntos de corte con los ejes coordenados y con las asíntotas.**
7. **Intervalos de crecimiento. Extremos relativos.**
8. **Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión.**

Representar gráficamente las siguientes funciones:

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. [Es simétrica respecto al punto (2,2), como se observará al efectuar su representación gráfica.]

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en todo su dominio de definición.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$, la curva presenta dos ramas parabólicas según el eje Oy; además,

   $$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

   La curva no tiene asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$ (doble) $\rightarrow$ puntos (0,0) y (3,0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = 0 \rightarrow$ punto (0,0).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3);$

$y' = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$

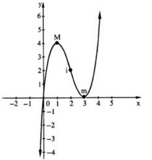
Son puntos críticos de los de abscisas 1 y 3.

Se estudia el signo de y' en los intervalos definidos por los puntos críticos:

x	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
y'	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty,1)$ y $(3,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1,3)$.

Hay un máximo relativo en el punto (1,4) y un mínimo relativo en el punto (3,0).



8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = 6x - 12 = 6(x - 2); \quad y'' = 0 \rightarrow x = 2.$$

Es punto crítico de y, de segunda especie, el de abscisa $x = 2$.

Se estudia el signo de y″ en los intervalos $(-\infty,2)$ y $(2,+\infty)$, determinados por el punto crítico de segunda especie:

En el intervalo $(-\infty,2)$ $y'' < 0$, por tanto, la función es convexa; en el intervalo $(2,+\infty)$ $y'' > 0$, es decir, la función es cóncava.

El punto (2,2) es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.

2. $y = x^3 - 2x^2.$

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. [Es simétrica respecto al punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$, como se observará al efectuar su representación gráfica.]

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = +\infty$, la curva presenta dos ramas parabólicas según el eje Oy; además,

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

La curva no tiene asíntotas.

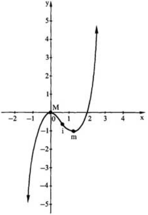
6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $x^3 - 2x^2 = x^2(x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ (doble), $x_2 = 2 \rightarrow$ puntos (0,0) y (2,0).

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 0 \rightarrow$ punto (0,0).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$y' = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$; $y' = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \dfrac{4}{3}$.



Son puntos críticos de y los de abscisas 0 y $\dfrac{4}{3}$.

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$	$\left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$
y'	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$.

Presenta un máximo relativo en el punto (0,0) y un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{32}{27}\right)$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = 6x - 4 = 2(3x - 2);\quad y'' = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Es punto crítico de y, de segunda especie, el de abscisa $\dfrac{2}{3}$.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$, determinados por el punto crítico de segunda especie:

En el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right)$ $y'' < 0$, por tanto, la función es convexa; en el intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ $y'' > 0$, es decir, la función es cóncava.

El punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.

3. $y = x^3(x - 1)$.

(Propuesto en la Univ. de Oviedo.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \pm\infty$, la curva presenta dos ramas parabólicas según el eje Oy; además,

   $$\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

   La curva no tiene asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = x^3(x - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ (triple), $x_2 = 1 \rightarrow$ puntos (0,0) y (1,0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = 0 \rightarrow$ punto (0,0).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $y' = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$; $y' = 0 \rightarrow x_1 = 0$(doble), $x_2 = \frac{3}{4}$.

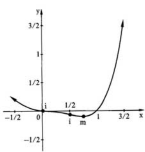
   Son puntos críticos de y los de abscisas 0 y $\frac{3}{4}$.

   Se estudia el signo de y' en los intervalos definidos por los puntos críticos:

x	$(-\infty,0)$	$\left(0, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
y'	−	−	+

   La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$.

   En el punto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{256}\right)$ existe un mínimo relativo.



8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1);$$

$$y'' = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas 0 y $\frac{1}{2}$.

Se estudia el signo de y″ en los intervalos determinados por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty,0)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
y″	+	−	+

La función es cóncava en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y convexa en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Los puntos (0,0) y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$ son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.

4. $y = x^3 - 2x^2 + x - 1.$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. [Es simétrica respecto al punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{25}{27}\right)$, como se observará al efectuar su representación gráfica.]

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$, la curva presenta ramas parabólicas según el eje Oy; además,

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty.$$

   La curva no tiene asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow$ se trata de una ecuación cúbica que tiene dos soluciones complejas conjugadas y una raíz real en $x \approx 1{,}75 \rightarrow$ punto (1,75; 0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = -1 \rightarrow$ punto $(0, -1)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1; \quad y' = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$$

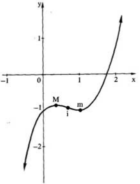
Son puntos críticos de y los de abscisas $\frac{1}{3}$ y 1.

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
y'	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y $(1, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Hay un máximo relativo en el punto $\left(\frac{1}{3}, -\frac{23}{27}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.



8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = 6x - 4 = 2(3x - 2); \quad y'' = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Es punto crítico de y, de segunda especie, el de abscisa $\frac{2}{3}$.

Se estudia el signo de y″ en los intervalos $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, definidos por el punto crítico de segunda especie:

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ $y'' < 0$, por tanto, la función es convexa; en el intervalo $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ $y'' > 0$, es decir, la función es cóncava.

El punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{25}{27}\right)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.

5. $y = (x - 1)^2 (x + 1)^3$.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

1. Dominio de definición:
   El conjunto R de los números reales.
2. Simetrías:
   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La curva presenta dos ramas parabólicas para $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$; en la primera $y \to -\infty$ y en la segunda $y \to +\infty$.

   La curva no tiene asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = (x - 1)^2 (x + 1)^3 = 0 \to x_1 = 1$ (doble), $x_2 = -1$ (triple) $\to$ puntos (1,0) y (−1,0).

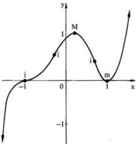
   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = (0 - 1)^2 (0 + 1)^3 = 1 \to$ punto (0,1).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $y = (x - 1)^2 (x + 1)^3 = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1;$

   $y' = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = (x + 1)^2 (x - 1)(5x - 1);\quad y' = 0 \to x_1 = -1$ (doble), $x_2 = \dfrac{1}{5}$, $x_3 = 1$.

   Son puntos críticos de y los de abscisas $-1, \dfrac{1}{5}$ y 1.



Se estudia el signo de y′ en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
y′	+	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $\left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right)$ y $(1, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $\left(\dfrac{1}{5}, 1\right)$.

En el punto $\left(\dfrac{1}{5}; 1{,}11\right)$ la función presenta un máximo relativo y en el punto (1,0) un mínimo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = 20x^3 + 12x^2 - 12x - 4 = 4(x + 1)(5x^2 - 2x - 1);$$

$$y'' = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{6}}{5},\ x_3 = \frac{1 + \sqrt{6}}{5}.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas -1, $\dfrac{1 - \sqrt{6}}{5} \approx -0{,}29$ y $\dfrac{1 + \sqrt{6}}{5} \approx 0{,}69$.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1; -0{,}29)$	$(-0{,}29; 0{,}69)$	$(0{,}69; +\infty)$
y''	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es convexa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-0{,}29; 0{,}69)$ y cóncava en los intervalos $(-1; -0{,}29)$ y $(0{,}69; +\infty)$.

Los puntos $(-1{,}0)$, $(-0{,}29; 0{,}59)$ y $(0{,}69; 0{,}46)$ son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.

6. $y = |x - 1| + x^2 + |x| + 1.$

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Se trata de una función definida como una suma en la que algunos sumandos son funciones en valor absoluto. Se considera la función definida en las zonas determinadas por las soluciones de $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, y $x = 0$.

- Zona I, $x < 0$, se cumple que $x - 1 < 0 \rightarrow |x - 1| = 1 - x$ y $x < 0 \rightarrow |x| = -x$; por tanto:

$$y = y_1 = |x - 1| + x^2 + |x| + 1 = 1 - x + x^2 - x + 1 = x^2 - 2x + 2, \quad \text{para } x \in (-\infty, 0).$$

- Zona II, $0 < x < 1$, se cumple que $x - 1 < 0 \rightarrow |x - 1| = 1 - x$ y $x > 0 \rightarrow |x| = x$; por tanto:

$$y = y_2 = |x - 1| + x^2 + |x| + 1 = 1 - x + x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \quad \text{para } x \in (0,1).$$

- Zona III, $x > 1$, se cumple que $x - 1 > 0 \rightarrow |x - 1| = x - 1$ y $x > 0 \rightarrow |x| = x$; por tanto:

$$y = y_3 = |x - 1| + x^2 + |x| + 1 = x - 1 + x^2 + x + 1 = x^2 + 2x, \quad \text{para } x \in (1, \infty).$$

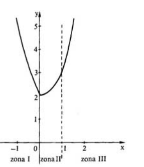
Se representa cada una de las tres funciones y_1, y_2 e y_3 en su zona correspondiente.

- La función $y_1 = x^2 - 2x + 2$ representa una parábola, orientada hacia arriba (el signo del coeficiente de segundo grado es positivo), que no corta al eje Ox, que corta al eje Oy en el punto (0,2) y que tiene por vértice el punto cuya abscisa es solución de la ecuación $y' = 2x - 2 = 0 \rightarrow$ $\rightarrow x = 1 \rightarrow$ punto (1,1).

- La función $y_2 = x^2 + 2$ representa una parábola, orientada hacia arriba, que no corta al eje Ox, que corta al eje Oy en el punto (0,2) y que tiene por vértice el punto cuya abscisa es solución de la ecuación $y' = 2x = 0 \rightarrow$ $\rightarrow x = 0 \rightarrow$ punto (0,2).

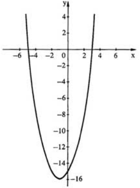
- La función $y_3 = x^2 + 2x = x(x + 2)$ representa una parábola, orientada hacia arriba, que corta al eje Ox en los puntos (0,0) y (−2,0), que corta al eje Oy en el punto (0,0) y que tiene por vértice el punto cuya abscisa es solución de la ecuación $y' = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ $\rightarrow$ punto (−1,−1).

La representación gráfica aparece en la figura adjunta.



7. $y = x^2 + 2x - 15.$

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)



Se trata de una parábola, orientada hacia arriba (el signo del coeficiente de segunda grado es positivo).

La parábola corta al eje Ox en los puntos cuyas abscisas son soluciones de la ecuación

$$y = x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -5;$$

es decir, en los puntos (3,0) y (−5,0).

La parábola corta al eje Oy en el punto (0,−15).

El vértice es el punto cuya abscisa es solución de la ecuación $y' = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$; es decir, el punto (−1,−16).

La representación gráfica aparece en la figura adjunta.

8. $y = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función es simétrica respecto al eje Oy, ya que $y(x) = y(-x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \dfrac{1}{\pi(1 + x^2)} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{\pi} \rightarrow$ punto $\left(0, \dfrac{1}{\pi}\right)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = -\frac{2x}{\pi(1 + x^2)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$

Es punto crítico de y el de abscisa 0.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, determinados por el punto crítico:

Para $x < 0$, $y' > 0$, por tanto, la función es creciente; para $x > 0$ $y' < 0$, es decir, la función es decreciente.

En el punto $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ la función presenta un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{2(3x^2 - 1)}{\pi(1 + x^2)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

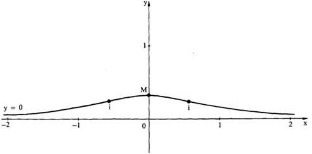
Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos de segunda especie:

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$
y''	+	−	+

La función es cóncava en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ y convexa en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

Los puntos $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4\pi}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{3}{4\pi}\right)$ son punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



9. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.

(Propuesto en la Univ. de Baleares.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   Es función simétrica respecto al eje Oy, ya que $y(x) = y(-x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 1.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $\dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$ (doble) $\rightarrow$ punto (0,0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 0 \rightarrow$ punto (0,0).

   Con la asíntota $y = 1$: $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} = 1 \rightarrow x^2 = x^2 + 1 \rightarrow 0 = 1 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$

   Es punto crítico de y el de abscisa 0.

   Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, definidos por el punto crítico:

   En el intervalo $(-\infty, 0)$ $y' < 0$, por tanto, la función es decreciente; en el intervalo $(0, +\infty)$ $y' > 0$, es decir, la función es creciente.

   En el punto (0,0) existe un mínimo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

   Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

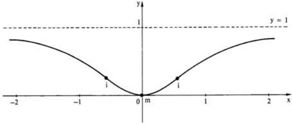
   Se estudia el signo de y'' en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

x	$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$
y''	$-$	$+$	$-$

La función es convexa en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty\right)$ y cóncava en el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

Los puntos $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}\right)$ son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



10. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, salvo para los que anulan el denominador $\rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4 \rightarrow$

   $$\rightarrow \text{dom. } (y) = (-\infty, 1) \cup (1,4) \cup (4, +\infty).$$

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real, salvo para $x = 1$ y $x = 4$, puntos en los que presenta discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

   $$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$

   La recta $x = 1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

   $$\lim_{x \to 1^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} y(x) = -\infty.$$

La recta $x = 4$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

$$\lim_{x \to 4^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 4^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ punto (0,0).

Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = 0 \rightarrow$ punto (0,0).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

Son puntos críticos de y aquellos en los que y' puede presentar cambio de signo; es decir, los puntos que anulan a y' (puntos cero) y los puntos de discontinuidad de y'.

$$y' = \frac{4 - x^2}{(x^2 - 5x + 4)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2.$$

Son, pues, puntos críticos de y los de abscisas -2, 2 (puntos ceros de y'), 1 y 4 (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
y'	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

La función es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(2, 4)$ y $(4, +\infty)$ y creciente en los intervalos $(-2, 1)$ y $(1, 2)$.

Son extremos relativos los puntos en los que se anula la primera derivada y cambia el sentido del crecimiento; por tanto, el punto $\left(-2, -\dfrac{1}{9}\right)$ es un mínimo relativo y el punto $(2, -1)$, un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

Son puntos críticos, de segunda especie, de y aquellos en los que y'' puede presentar cambio de signo; es decir, los puntos que anulan y'' (puntos cero) y los puntos de discontinuidad de y''.

$$y'' = \frac{2(x^3 - 12x + 20)}{(x^2 - 5x + 4)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 20 = 0.$$

Esta ecuación cúbica tiene una raíz real en $x \approx -4{,}1$ y dos raíces complejas conjugadas.

Son, pues, puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas $-4{,}1$ (punto cero de y''), 1 y 4 (discontinuidades de y'').

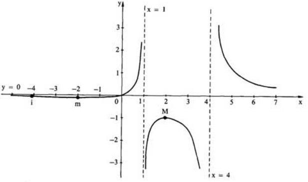
Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty; -4{,}1)$	$(-4{,}1; 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
y''	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es convexa en los intervalos $(-\infty; -4{,}1)$ y $(1{,}4)$ y cóncava en los intervalos $(-4{,}1; 1)$ y $(4, +\infty)$.

Son puntos de inflexión los puntos en los que se anula la segunda derivada y cambia el sentido de la concavidad; por tanto, el punto $(-4{,}1; -0{,}1)$ es un punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



11. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

(Propuesto en la Univ. de León.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, salvo para los que anulan el denominador $\rightarrow$ $\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1 \rightarrow$ dom. $(y) = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

2. Simetrías:

   Es función simétrica respecto al eje Oy, porque $y(x) = y(-x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real, excepto para $x = -1$ y $x = 1$, puntos en los que presenta discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

   $$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$

   La recta $x = -1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

   $$\lim_{x \to -1^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to -1^+} y(x) = -\infty.$$

   La recta $x = 1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

   $$\lim_{x \to 1^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = -1 \rightarrow$ punto $(0, -1)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

Son puntos críticos de y los que anulan y′ (puntos cero) y los puntos de discontinuidad de y′.

$$y' = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$

Son, pues, puntos críticos de y los de abscisas 0 (punto cero de y′), −1 y 1 (discontinuidades de y′).

Se estudia el signo de y′ en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
y′	+	+	−	−

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

El punto $(0, -1)$ es un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los que anulan y″ (puntos cero) y los puntos de discontinuidad de y″.

$$y'' = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 6x^2 + 2 = 0 \rightarrow \text{sin raíces reales.}$$

Por tanto, no existen puntos de inflexión.

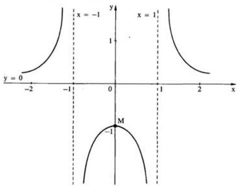
Los puntos críticos, de segunda especie, de y son, pues, los de abscisas −1 y 1 (puntos de discontinuidad de y″).

Se estudia el signo de y″ en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y″	+	−	+

La función es cóncava en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-1, 1)$.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



12. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$.

(Propuesto en la Univ. de Baleares.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, salvo para los que anulan el denominador $\rightarrow$ $\rightarrow$ $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1 \rightarrow$ dom. (y) $= (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

   Ahora bien, si se descomponen en factores el numerador y el denominador, resulta:

   $$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-4)} = \frac{x-2}{x-4}, \quad \text{para } x \neq 1.$$

   Es decir, aunque para $x = 1$ no está definida la función, en dicho punto se le puede asignar el valor $y(1) = \dfrac{1}{3}$, que es el verdadero valor de la función (racional) para $x = 1$.

   Así pues, el dominio de definición es dom. (y) $= (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

   En lo que sigue se estudia la función $y = \dfrac{x-2}{x-4}$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. [Es simétrica respecto al punto (4, 1), como se observará al efectuar su representación gráfica.]

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real, salvo para $x = 1$, punto en el que presenta una discontinuidad evitable, y para $x = 4$, punto en el que existe una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

   $$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 1.$$

   La recta $x = 4$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

   $$\lim_{x \to 4^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 4^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \dfrac{x-2}{x-4} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ punto (2, 0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = \dfrac{1}{2} \rightarrow$ punto $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

   Con la asíntota $y = 1$: $y = \dfrac{x-2}{x-4} = 1 \rightarrow x - 2 = x - 4 \rightarrow -2 = -4 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $$y' = -\frac{2}{(x-4)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow -2 = 0 \rightarrow \text{imposible.}$$

Por consiguiente, la curva no presenta extremos relativos.

Es punto crítico de y el punto de discontinuidad de y'; es decir, el de abscisa 4.

Se estudia el signo de y' en los intervalos definidos por el punto crítico:

Tanto para $x < 4$ como para $x > 4$, $y' < 0$; por tanto, la función es decreciente en todo su dominio de definición.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{4}{(x-4)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 4 = 0 \rightarrow \text{imposible.}$$

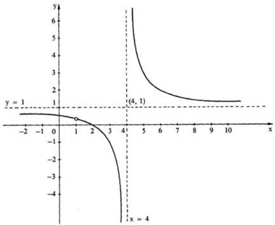
Por consiguiente, la curva no presenta puntos de inflexión.

Es punto crítico de y, de segunda especie, el punto de discontinuidad de y''; es decir, el de abscisa 4.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por el punto crítico de segunda especie:

En el intervalo $(-\infty, 4)$ $y'' < 0$, por tanto, la función es convexa; en el intervalo $(4, +\infty)$ $y'' > 0$, es decir, la función es cóncava.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



Nota: La curva presentada corresponde a la hipérbola equilátera $y - 1 = \frac{2}{x-4}$, salvo en lo que se refiere al punto $x = 1$.

13. $y = \frac{1}{x(x-1)}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

La función está definida para todos los valores reales, salvo para los que anulan el denominador $\rightarrow$ $\rightarrow x(x-1)=0 \rightarrow x_1=0, x_2=1 \rightarrow$ dom. $(y)=(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Simetrías:

La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. (Es simétrica respecto a la recta $x=\frac{1}{2}$, como se observará al efectuar su representación gráfica.)

3. Periodicidad:

No es función periódica.

4. Continuidad:

Es función continua en toda la recta real, excepto para $x=0$ y $x=1$, puntos en los que existen discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $y=0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x)=0.$$

La recta $x=0$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to 0^-} y(x)=+\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} y(x)=-\infty.$$

La recta $x=1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

$$\lim_{x \to 1^-} y(x)=-\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} y(x)=+\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y=\frac{1}{x(x-1)}=0 \rightarrow 1=0 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

Con el eje Oy: la curva no corta al eje de ordenadas, ya que la función no está definida para $x=0$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y'=-\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}; \quad y'=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas $\frac{1}{2}$ (punto cero de y'), 0 y 1 (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
y'	+	+	−	−

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y decreciente en los intervalos $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$.

El punto $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ es un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{6x^2 - 6x + 2}{(x^2 - x)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow \text{sin raíces reales.}$$

Por tanto, la función no presenta puntos de inflexión.

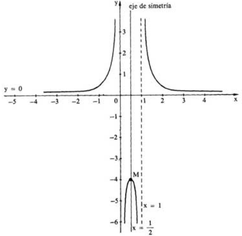
Son puntos críticos de y, de segunda especie, los puntos de discontinuidad de y''; es decir, los de abscisas 0 y 1.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos que determinan los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	+	−	+

La función es cóncava en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(0,1)$.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



14. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

La función es simétrica respecto al origen, ya que $y(x) = -y(-x)$.

3. Periodicidad:

No es función periódica.

4. Continuidad:

Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{x}{1 + x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ punto $(0, 0)$.

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 0 \rightarrow$ punto $(0, 0)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas -1 y 1.

Se estudia el signo de y' en los intervalos definidos por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$

La función es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

El punto $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ es un mínimo relativo y el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$.

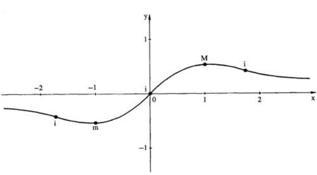
Se estudia el signo de y'' en los intervalos que determinan los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y''	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es convexa en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$ y cóncava en los intervalos $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$.

Los puntos $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



15. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

(Propuesto en la Univ. de Baleares.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, salvo para los que anulan el denominador $\rightarrow$ $\rightarrow$ $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \rightarrow$ dom. $(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Simetrías:

   Es función simétrica respecto al eje Oy, ya que $y(x) = y(-x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real, salvo para $x = -1$ y $x = 1$, puntos en los que presenta discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

   $$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 1.$$

   La recta $x = -1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

   $$\lim_{x \to -1^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to -1^+} y(x) = -\infty.$$

   La recta $x = 1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

   $$\lim_{x \to 1^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ sin raíces reales $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = -1 \rightarrow$ punto $(0, -1)$.

Con la asíntota $y = 1$: $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1 \rightarrow x^2 + 1 = x^2 - 1 \rightarrow 1 = -1 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$
$\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas 0 (punto cero de y'), -1 y 1 (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	+	+	−	−

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$.

En el punto $(0, -1)$ la función presenta un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 3x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{sin raíces reales.}$$

Por tanto, no existen puntos de inflexión.

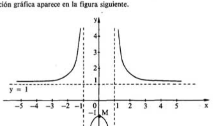
Son puntos críticos de y, de segunda especie, los puntos de discontinuidad de y''; es decir, los de abscisas -1 y 1.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	+	−	+

La función es cóncava en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-1, 1)$.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



16. $y = \dfrac{x - 1}{x - 3}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, salvo para los que anulan el denominador $\rightarrow$ $\rightarrow$ $x - 3 = 0$ $\rightarrow$ $x = 3$ $\rightarrow$ dom. (y) $= (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. [Es simétrica respecto al punto (3, 1), como se observará al efectuar su representación gráfica.]

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real, excepto para $x = 3$, punto en el que existe una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 1.$$

   La recta $x = 3$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to 3^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 3^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \dfrac{x - 1}{x - 3} = 0$ $\rightarrow$ $x = 1$ $\rightarrow$ punto (1, 0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{3}$ $\rightarrow$ punto $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.

   Con la asíntota $y = 1$: $y = \dfrac{x - 1}{x - 3} = 1$ $\rightarrow$ $x - 1 = x - 3$ $\rightarrow$ $-1 = -3$ $\rightarrow$ imposible $\rightarrow$ $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{-2}{(x - 3)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow -2 = 0 \rightarrow \text{imposible.}$$

   Por consiguiente, la curva no presenta extremos relativos.

   Es punto crítico de y el punto de discontinuidad de y'; es decir, el de abscisa 3.

   Se estudia el signo de y' en los intervalos definidos por el punto crítico:

   Tanto para $x < 3$ como para $x > 3$, $y' < 0$; por tanto, la función es decreciente en todo su dominio de definición.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{4}{(x - 3)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 4 = 0 \rightarrow \text{imposible.}$$

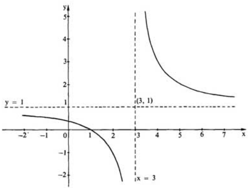
Por consiguiente, la curva no presenta puntos de inflexión.

Es punto crítico de y, de segunda especie, el punto de discontinuidad de y"; es decir, el de abscisa 3.

Se estudia el signo de y" en los intervalos determinados por el punto crítico de segunda especie:

En el intervalo $(-\infty, 3)$ $y'' < 0$, por tanto, la función es convexa; en el intervalo $(3, +\infty)$ $y'' > 0$, es decir, la función es cóncava.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



Nota: La curva representada corresponde a la hipérbola equilátera $y - 1 = \dfrac{2}{x - 3}$.

17. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, excepto para los que anulan el denominador $\rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2 \rightarrow$ dom. $(y) = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad.

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real, salvo para $x = -2$ y $x = 1$, puntos en los que presenta discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 1.$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to -2^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to -2^+} y(x) = -\infty.$$

La recta $x = 1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2} = 0 \rightarrow x = 0$ (doble) $\rightarrow$ punto (0, 0).

Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = 0 \rightarrow$ punto (0, 0).

Con la asíntota $y = 1$: $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1 \rightarrow x^2 = x^2 + x - 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ punto (2, 1).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas 0, 4 (puntos cero de y'), −2 y 1 (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
y'	+	+	−	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(4, +\infty)$ y decreciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 4)$.

El punto (0, 0) es un máximo relativo y el punto $\left(4, \dfrac{8}{9}\right)$ es un mínimo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{-2(x^3 - 6x^2 - 4)}{(x^2 + x - 2)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow x^3 - 6x^2 - 4 = 0.$$

Se trata de una ecuación cúbica que tiene una raíz real en $x \approx 6{,}1$ y dos raíces complejas conjugadas.

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas 6,1 (punto cero de y''), −2 y 1 (discontinuidades de y'').

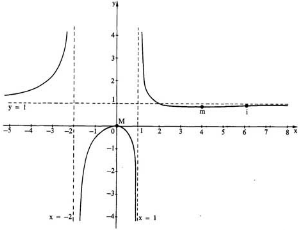
Se estudia el signo de y'' en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1; 6,1)$	$(6,1; +\infty)$
y''	+	−	+	−

La función es cóncava en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(1; 6,1)$ y convexa en los intervalos $(-2, 1)$ y $(6,1; +\infty)$.

El punto (6,1; 0,9) es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



18. $y = \dfrac{1}{x(x-a)}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, salvo para los que anulan el denominador $\rightarrow$ $x(x-a) = 0$ $\rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = a$ $\rightarrow$ dom. (y) $= (-\infty, a) \cup (a, 0) \cup (0, +\infty)$ si $a < 0$ o dom. (y) $= (-\infty, 0) \cup (0, a) \cup (a, +\infty)$ si $a > 0$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto a los ejes coordenados ni respecto al origen. (Es simétrica respecto a la recta $x = \dfrac{a}{2}$, como se observará al efectuar su representación gráfica.)

3. Periodicidad.

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real, excepto para $x = 0$ y $x = a$, puntos en los que existen discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$

Si $a < 0$, se tiene:

La recta $x = a$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to a^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to a^+} y(x) = -\infty.$$

La recta $x = 0$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty.$$

Si $a > 0$, resulta:

La recta $x = 0$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} y(x) = -\infty.$$

La recta $x = a$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to a^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to a^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{1}{x(x-a)} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

Con el eje Oy: la curva no corta al eje de ordenadas, porque la función no está definida para $x = 0$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = -\frac{2x - a}{x^2(x-a)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow 2x - a = 0 \rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas $\dfrac{a}{2}$ (punto cero de y'), 0 y a (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

Si $a < 0$, se tiene:

x	$(-\infty, a)$	$\left(a, \frac{a}{2}\right)$	$\left(\frac{a}{2}, 0\right)$	$(0, +\infty)$
y'	+	+	−	−

Si $a > 0$, resulta:

x	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{a}{2}\right)$	$\left(\frac{a}{2}, a\right)$	$(a, +\infty)$
y'	+	+	−	−

Así pues, en los dos casos la función es creciente en la parte de su dominio en la que $x < \dfrac{a}{2}$ y decreciente en la parte de su dominio en la que $x > \dfrac{a}{2}$.

El punto $\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{4}{a^2}\right)$ es un máximo relativo en ambos casos.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{6x^2 - 6ax + 2a^2}{x^3(x-a)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 6x^2 - 6ax + 2a^2 = 0 \rightarrow \text{sin raíces reales.}$$

Por tanto, la función no presenta puntos de inflexión.

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los puntos de discontinuidad de y"; es decir, los de abscisas 0 y a.

Se estudia el signo de y" en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

Si $a < 0$, se tiene:

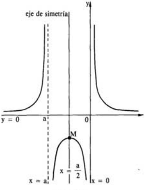
x	$(-\infty, a)$	$(a, 0)$	$(0, +\infty)$
y"	+	−	+

Si $a > 0$, resulta:

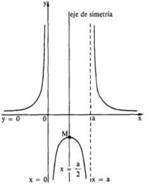
x	$(-\infty, 0)$	$(0, a)$	$(a, +\infty)$
y"	+	−	+

Así pues, en los dos casos la función es cóncava en las zonas externas a los dos asíntotas verticales y convexa en la zona limitada por las dos asíntotas verticales.

La representación gráfica aparece en las figuras siguientes.



Si a < 0



Si a > 0

Nota: Consúltese el ejercicio **13** de este mismo tema.

19. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

1. Dominio de definición:

La función está definida para todos los valores reales, excepto para los que anulan el denominador $\rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ dom. $(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. Simetrías:

La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. [Es simétrica respecto al punto (−1, −2), como se observará al efectuar su representación gráfica.]

3. Periodicidad:

No es función periódica.

4. Continuidad:

Es función continua en toda la recta real, salvo para $x = -1$, punto en el que presenta una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $x = -1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to -1^+} y(x) = +\infty.$$

Asíntota oblicua $y = mx + n$:

- $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + x} = 1;$

- $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [y(x) - mx] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{x + 1} - x \right) =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1.$$

Así pues, la recta $y = x - 1$ es asíntota oblicua, tanto a la izquierda como a la derecha.

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{x^2}{x + 1} = 0 \rightarrow x = 0$ (doble) $\rightarrow$ punto (0, 0).

Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = 0 \rightarrow$ punto (0, 0).

Con la asíntota $y = x - 1$: $y = \dfrac{x^2}{x + 1} = x - 1 \rightarrow x^2 = x^2 - 1 \rightarrow 0 = -1 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2};\ y' = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas 0, −2 (puntos cero de y″) y −1 (discontinuidad de y′).

Se estudia el signo de y′ en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
y′	+	−	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$ y decreciente en los intervalos $(-2, -1)$ y $(-1, 0)$.

El punto (−2, −4) existe un máximo relativo y en el punto (0, 0), un mínimo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 2 = 0 \rightarrow \text{imposible.}$$

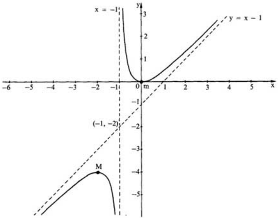
Por consiguiente, la curva no presenta puntos de inflexión.

Es punto crítico de y, de segunda especie, el punto de discontinuidad de y''; es decir, el de abscisa -1.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos definidos por el punto crítico de segunda especie.

En el intervalo $(-\infty, -1)$ $y'' < 0$, por tanto, la función es convexa; en el intervalo $(-1, +\infty)$ $y'' > 0$, es decir, la función es cóncava.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



20. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1}$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, excepto para los que anulan el denominador $\rightarrow$ $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ $\rightarrow$ $x = 1$ $\rightarrow$ dom. (y) $= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

La función es continua en toda la recta real, salvo para $x = 1$, punto en el que existe una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $x = 1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} y(x) = +\infty.$$

Asíntota oblicua $y = mx + n$:

- $m = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = 1;$

- $n = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} [y(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} - x \right) =$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 5.$$

Es decir, la recta $y = x + 5$ es asíntota oblicua, tanto a la izquierda como a la derecha.

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (x + 1)^3 = 0 \rightarrow x = -1$ (triple) $\rightarrow$ punto $(-1, 0)$.

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 1 \rightarrow$ punto $(0, 1)$.

Con la asíntota $y = x + 5$: $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x + 5 \rightarrow$

$$\rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \rightarrow 12x = 4 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow \text{punto} \left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3} \right).$$

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{3(x + 1)^2 (x - 1)^2 - 2(x - 1)(x + 1)^3}{(x - 1)^4} = \frac{3(x + 1)^2 (x - 1) - 2(x + 1)^3}{(x - 1)^3};$$

$$y' = \frac{(x + 1)^2 (3x - 3 - 2x - 2)}{(x - 1)^3} = \frac{(x + 1)^2 (x - 5)}{(x - 1)^3};$$

$$y' = 0 \rightarrow (x + 1)^2 (x - 5) = 0 \rightarrow x_1 = -1 \text{ (doble)}, x_2 = 5.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas -1, 5 (puntos cero de y') y 1 (discontinuidad de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 5)$	$(5, +\infty)$
y'	+	+	−	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(5, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 5)$.

El punto $\left(5, \dfrac{27}{2} \right)$ es un mínimo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{[2(x+1)(x-5) + (x+1)^2](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^6};$$

$$y'' = \frac{(x^2-1)(3x-9) - 3(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^4};$$

$$y'' = \frac{(3x^3 - 9x^2 - 3x + 9) - (3x^3 - 9x^2 - 27x - 15)}{(x-1)^4} = \frac{24x + 24}{(x-1)^4} = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4};$$

$$y'' = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas −1 (punto cero de y″) y 1 (discontinuidad de y″).

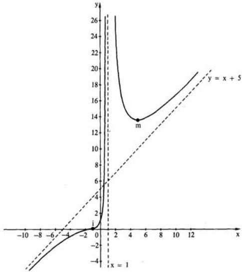
Se estudia el signo de y″ en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y″	−	+	+

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$ y cóncava en los intervalos $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$.

El punto $(-1, 0)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



21. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x - 6}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, excepto para los que anulan el denominador $\rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ dom. $(y) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen. [Es simétrica respecto al punto (3, 4), como se observará al efectuar la representación gráfica.]

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real, salvo para $x = 3$, punto en el que existe una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $x = 3$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to 3^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 3^+} y(x) = +\infty.$$

   Asíntota oblicua $y = mx + n$:

   • $m = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 6x} = \frac{1}{2}$.

   • $n = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} [y(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x - 6} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x - 1}{2x - 6} = \frac{5}{2}$.

   Por tanto, la recta $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$ es asíntota oblicua, tanto a la izquierda como a la derecha.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x - 6} = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \rightarrow$

   $\rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}41; x_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2{,}41 \rightarrow$ puntos (0,41; 0) y (−2,41; 0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = \dfrac{1}{6} \rightarrow$ punto $\left(0, \dfrac{1}{6}\right)$.

   Con la asíntota $y = \dfrac{x + 5}{2}$: $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x - 6} = \dfrac{x + 5}{2} \rightarrow$

   $\rightarrow x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x - 15 \rightarrow -1 = -15 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{(2x + 2)(2x - 6) - 2(x^2 + 2x - 1)}{(2x - 6)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 12 - 2x^2 - 4x + 2}{(2x - 6)^2};$$

$$y' = \frac{2x^2 - 12x - 10}{(2x - 6)^2} = \frac{x^2 - 6x - 5}{2(x - 3)^2};$$

$y' = 0 \rightarrow x^2 - 6x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{14} \approx 6{,}74; \quad x_2 = 3 - \sqrt{14} \approx -0{,}74.$

Son puntos críticos de y los de abscisas 6,74; –0,74 (puntos cero de y′) y 3 (discontinuidad de y′).

Se estudia el signo de y′ en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty; -0{,}74)$	$(-0{,}74; 3)$	$(3; 6{,}74)$	$(6{,}74; +\infty)$
y′	+	–	–	+

La función es creciente en los intervalos $(-\infty; -0{,}74)$ y $(6{,}74; +\infty)$ y decreciente en los intervalos $(-0{,}74; 3)$ y $(3; 6{,}74)$.

En el punto (–0,74; 0,26) hay un máximo relativo y en el punto (6,74; 7,74), un mínimo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{(2x - 6)\,2\,(x - 3)^2 - 4(x - 3)\,(x^2 - 6x - 5)}{4(x - 3)^4} = \frac{(x - 3)^2 - (x^2 - 6x - 5)}{(x - 3)^3};$$

$$y'' = \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x + 5}{(x - 3)^3} = \frac{14}{(x - 3)^3};$$

$$y'' = 0 \rightarrow 14 = 0 \rightarrow \text{imposible.}$$

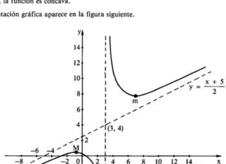
Por consiguiente, la curva no presenta puntos de inflexión.

Es punto crítico de y, de segunda especie, el punto de discontinuidad de y″; es decir, el de abscisa 3.

Se estudia el signo de y″ en los intervalos definidos por el punto crítico de segunda especie:

En el intervalo $(-\infty, 3)$ $y'' < 0$, por tanto, la función es convexa; en el intervalo $(3, +\infty)$ $y'' > 0$, es decir, la función es cóncava.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



22. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales, excepto para los que anulan el denominador $\rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1 \rightarrow$ dom. (y) $= (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad.

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real, salvo para $x = 1$ y $x = 4$, puntos en los que presenta discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

   $$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 1.$$

   La recta $x = 1$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

   $$\lim_{x \to 1^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^+} y(x) = -\infty.$$

   La recta $x = 4$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, puesto que

   $$\lim_{x \to 4^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 4^+} y(x) = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2 \rightarrow$

   $\rightarrow$ puntos $(-1, 0)$ y $(-2, 0)$.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{2} \rightarrow$ punto $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

   Con la asíntota $y = 1$: $y = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 5x + 4} = 1 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 - 5x + 4 \rightarrow$

   $\rightarrow 8x = 2 \rightarrow x = \dfrac{1}{4} \rightarrow$ punto $\left(\dfrac{1}{4}, 1\right)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $$y' = \frac{(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) - (2x - 5)(x^2 + 3x + 2)}{(x^2 - 5x + 4)^2};$$

   $$y' = \frac{2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 - 2x^3 - x^2 + 11x - 10}{[(x - 1)(x - 4)]^2} = \frac{-8x^2 + 4x + 22}{(x - 1)^2 (x - 4)^2};$$

$$y' = \frac{-2(4x^2 - 2x - 11)}{(x-1)^2 (x-4)^2}; \quad y' = 0 \rightarrow 4x^2 - 2x - 11 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{1 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 1{,}93; \quad x_2 = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{4} \approx -1{,}43.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas 1,93; –1,43 (puntos cero de y'), 1 y 4 (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos:

x	$(-\infty; -1{,}43)$	$(-1{,}43; 1)$	$(1; 1{,}93)$	$(1{,}93; 4)$	$(4, +\infty)$
y'	–	+	+	–	–

La función es decreciente en los intervalos $(-\infty; -1{,}43)$, $(1{,}93; 4)$ y $(4, +\infty)$ y creciente en los intervalos $(-1{,}43; 1)$ y $(1; 1{,}93)$.

El punto $(-1{,}43; -0{,}02)$ es un mínimo relativo y el punto $(1{,}93; -5{,}98)$, un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{(-16x + 4)(x-1)^2 (x-4)^2 - [2(x-1)(x-4)^2 + 2(x-4)(x-1)^2](-8x^2 + 4x + 22)}{(x-1)^4 (x-4)^4};$$

$$y'' = \frac{(-16x + 4)(x-1)(x-4) - [2(x-4) + 2(x-1)](-8x^2 + 4x + 22)}{(x-1)^3 (x-4)^3};$$

$$y'' = \frac{(-16x + 4)(x-1)(x-4) - (4x - 10)(-8x^2 + 4x + 22)}{(x-1)^3 (x-4)^3};$$

$$y'' = \frac{(-16x^3 + 84x^2 - 84x + 16) - (-32x^3 + 96x^2 + 48x - 220)}{(x-1)^3 (x-4)^3};$$

$$y'' = \frac{16x^3 - 12x^2 - 132x + 236}{(x-1)^3 (x-4)^3};$$

$$y'' = \frac{4(4x^3 - 3x^2 - 33x + 59)}{(x-1)^3 (x-4)^3}; \quad y'' = 0 \rightarrow 4x^3 - 3x^2 - 33x + 59 = 0.$$

Esta ecuación cúbica tiene una raíz real en $x \approx -3{,}23$ y dos raíces complejas conjugadas.

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas –3,23 (puntos cero de y"), 1 y 4 (discontinuidades de y").

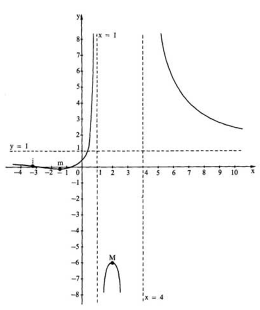
Se estudia el signo de y" en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty; -3{,}23)$	$(-3{,}23; 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
y"	–	+	–	+

La función es convexa en los intervalos $(-\infty; -3{,}23)$ y $(1, 4)$ y cóncava en los intervalos $(-3{,}23; 1)$ y $(4, +\infty)$.

El punto $(-3{,}23; 0{,}09)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



23. $y^2 = \dfrac{x^2}{x-1}$.

La gráfica de la función propuesta consta de dos ramas; cada rama corresponde a una de las funciones explícitas $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{x-1}} = \pm\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$. Como ambas ramas son simétricas respecto al eje Ox, se hace el estudio de la función analizando en particular la rama positiva, correspondiente a la función $y = +\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$, y señalando en los apartados que convenga lo referente a la rama negativa, que corresponde a la función $y = -\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$.

Para representar la función se hace la gráfica de la rama positiva y se construye por simetría la rama negativa.

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales que hacen positivo o cero el radicando y que no anulan el denominador $\rightarrow$ $x - 1 > 0$ $\rightarrow$ $x > 1$ $\rightarrow$ dom. (y) = $(1, +\infty)$.

2. Simetrías:

La rama positiva y la negativa son simétricas respecto al eje Ox; por tanto, la función es simétrica respecto al eje Ox, ya que $y(x) = -y(x)$.

Consideradas por separado, ninguna de las dos ramas es simétrica respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

No es función periódica.

4. Continuidad:

Es función continua en todo su dominio de definición.

En el punto $x = 1$ (que no pertenece al dominio de definición de la función) se puede considerar que existe una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(+ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \right) = 0$, la rama positiva presenta una rama parabólica según el eje Ox; además, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(+ \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \right) = +\infty$.

Al ser $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(- \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \right) = 0$, la rama negativa también presenta una rama parabólica según el eje Ox; además, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(- \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \right) = -\infty$.

La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la rama positiva, solamente a la derecha, puesto que $\lim\limits_{x \to 1^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(+ \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \right) = +\infty$; la recta $x = 1$ también es asíntota vertical de la rama negativa, sólo a la derecha, porque $\lim\limits_{x \to 1^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(- \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \right) = -\infty$.

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \pm \dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas, ya que $x = 0$ no pertenece al dominio de definición de la función.

Con el eje Oy: la curva no corta al eje de ordenadas, porque la función no está definida para $x = 0$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \pm \frac{\sqrt{x-1} - \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \pm \frac{2(x-1) - x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} = \pm \frac{x-2}{2\sqrt{(x-1)^3}};$$

$$y' = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas 2 (punto cero de y') y 1 (discontinuidad de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$, determinados por los puntos críticos en el dominio de definición de y:

x	(1, 2)	(2, +∞)
y'	∓	±

La rama positiva es decreciente en el intervalo (1, 2) y creciente en el intervalo (2, + ∞); la rama negativa es creciente en el intervalo (1, 2) y decreciente en el intervalo (2, + ∞).

El punto (2, 2) de la rama positiva es un mínimo relativo y el punto (2, –2) de la rama negativa es un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \pm \frac{2\sqrt{(x-1)^3} - 2\dfrac{3(x-1)^2}{2\sqrt{(x-1)^3}}(x-2)}{4(x-1)^3} = \pm \frac{2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x-2)}{4(x-1)^3\sqrt{(x-1)^3}};$$

$$y'' = \pm \frac{2(x-1) - 3(x-2)}{4(x-1)\sqrt{(x-1)^3}} = \pm \frac{4-x}{4(x-1)\sqrt{(x-1)^3}};$$

$$y'' = 0 \rightarrow 4 - x = 0 \rightarrow x = 4.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas 4 (punto cero de y″) y 1 (discontinuidad de y″).

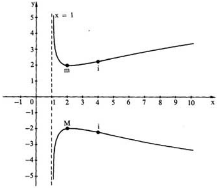
Se estudia el signo de y″ en los intervalos (1, 4) y (4, + ∞), definidos por los puntos críticos de segunda especie en el dominio de definición de y:

x	(1, 4)	(4, + ∞)
y″	±	∓

La rama positiva es cóncava en el intervalo (1, 4) y convexa en el intervalo (4, + ∞); la rama negativa es convexa en el intervalo (1, 4) y cóncava en el intervalo (4, + ∞).

El punto $\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \approx (4;\ 2{,}31)$ de la rama positiva y el punto $\left(4, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \approx (4;\ -2{,}31)$ de la rama negativa son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



24. $y^2 = \dfrac{x-1}{x^2-4}$.

La gráfica de la función propuesta consta de dos porciones; cada porción corresponde a una de las dos funciones explícitas $y = \pm\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-4}}$. Como ambas porciones son simétricas respecto al eje Ox, se hace el estudio y la representación gráfica de la función de forma similar a la utilizada en el ejercicio anterior.

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales que hacen positivo o cero el radicando y que no anulan el denominador $\rightarrow \dfrac{x-1}{x^2-4} \geqslant 0$ y $x^2 - 4 \neq 0$.

   Las condiciones anteriores equivalen a uno de los dos siguientes sistemas de inecuaciones:

   $$1)\ \begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ x^2 - 4 > 0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x - 1 \leqslant 0, \\ x^2 - 4 < 0. \end{cases}$$

   Solución del sistema 1):

   Se resuelve cada inecuación:

   $$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x < -2 \text{ y } x > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [1, +\infty) \\ (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases} \rightarrow (2, +\infty).$$

   Solución del sistema 2):

   Se resuelve cada inecuación: $\begin{cases} x - 1 \leqslant 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-\infty, 1] \\ (-2, 2) \end{cases} \rightarrow (-2, 1].$

   El dominio de definición es la unión de las soluciones de ambos sistemas $\rightarrow$ dom. (y) = $= (-2, 1] \cup (2, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La porción positiva y la negativa son simétricas respecto al eje Ox; es decir, la función es simétrica respecto al eje Ox, porque $y(x) = -y(x)$.

   Consideradas por separado, ninguna de las porciones es simétrica respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en todo su dominio de definición.

   En los puntos $x = -2$ y $x = 2$ (que no pertenecen al dominio de definición de la función) se puede considerar que existen discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal de las dos porciones de la curva, sólo a la derecha, puesto que $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\pm\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-4}}\right) = 0.$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical de la porción positiva, únicamente a la derecha, ya que $\lim\limits_{x \to -2^+} y(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \left(+ \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} \right) = +\infty$; la recta $x = -2$ también es asíntota vertical de la porción negativa, solamente a la derecha, porque

$$\lim_{x \to -2^+} y(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(- \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} \right) = -\infty.$$

La recta $x = 2$ es asíntota vertical de la porción positiva, sólo a la derecha, puesto que $\lim\limits_{x \to 2^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(+ \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} \right) = +\infty$; la recta $x = 2$ también es asíntota vertical de la porción negativa, únicamente a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to 2^+} y(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(- \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} \right) = -\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}} = 0 \to x - 1 = 0 \to x = 1 \to$ punto $(1, 0)$.

Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = \pm \frac{1}{2} \to$ puntos $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \pm \frac{(x^2-4) - 2x(x-1)}{(x^2-4)^2\, 2 \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}} = \pm \frac{(-x^2+2x-4)}{2\sqrt{(x^2-4)^3\,(x-1)}};$$

$$y' = 0 \to x^2 - 2x + 4 = 0 \to \text{sin raíces reales.}$$

Por tanto, la función no presenta extremos relativos.

Son puntos críticos de y los puntos de discontinuidad de y'; es decir, los de abscisas -2, 1 y 2.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-2, 1)$ y $(2, +\infty)$, definidos por los puntos críticos en el dominio de definición de y:

x	$(-2, 1)$	$(2, +\infty)$
y'	$\mp$	$\mp$

La porción positiva es decreciente y la porción negativa es creciente en los intervalos $(-2, 1)$ y $(2, +\infty)$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \pm \frac{(-2x+2)\, 2\sqrt{(x^2-4)^3\,(x-1)} - 2\,\frac{3(x^2-4)^2\, 2x(x-1) + (x^2-4)^3}{2\sqrt{(x^2-4)^3\,(x-1)}}\,(-x^2+2x-4)}{4(x^2-4)^3\,(x-1)};$$

$$y'' = \pm \frac{-4(x-1)\,(x^2-4)^3\,(x-1) - [6x(x^2-4)^2\,(x-1) + (x^2-4)^3]\,(-x^2+2x-4)}{4(x^2-4)^3\,(x-1)\sqrt{(x^2-4)^3\,(x-1)}};$$

$$y'' = \pm \frac{-4(x-1)^2\,(x^2-4) - [6x(x-1) + (x^2-4)]\,(-x^2+2x-4)}{4(x^2-4)\,(x-1)\sqrt{(x^2-4)^3\,(x-1)}};$$

$$y'' = \pm \frac{(-4x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 32x + 16) - (-7x^4 + 20x^3 - 36x^2 + 16x + 16)}{4(x^2 - 4)(x - 1)\sqrt{(x^2 - 4)^3 (x - 1)}};$$

$$y'' = \pm \frac{3x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 48x}{4(x^2 - 4)(x - 1)\sqrt{(x^2 - 4)^3 (x - 1)}} = \pm \frac{3x(x^3 - 4x^2 + 16x - 16)}{4(x^2 - 4)(x - 1)\sqrt{(x^2 - 4)^3 (x - 1)}};$$

$$y'' = 0 \rightarrow 3x(x^3 - 4x^2 + 16x - 16) = 0 \rightarrow x = 0,\ x^3 - 4x^2 + 16x - 16 = 0.$$

Esta ecuación cúbica tiene en $x \approx 1{,}28$ una raíz real que no pertenece al dominio de definición de la función; por tanto, sólo se considera $x = 0$ como valor que anula a y''.

Son, pues, puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas 0 (punto cero de y''), -2, 1 y 2 (discontinuidades de y'').

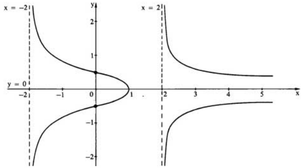
Se estudia el signo de y'' en los intervalos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$, determinados por los puntos críticos de segunda especie en el dominio de definición de y:

x	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(2, +\infty)$
y''	$\pm$	$\mp$	$\pm$

La porción positiva es cóncava en los intervalos $(-2, 0)$ y $(2, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(0, 1)$; la porción negativa es convexa en los intervalos $(-2, 0)$ y $(2, +\infty)$ y cóncava en el intervalo $(0, 1)$.

El punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de la porción positiva y el punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ de la porción negativa son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



25. $y^2 = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

La gráfica de la función propuesta consta de una porción positiva y otra negativa, que corresponden, respectivamente, a una de las dos funciones explícitas $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$. Como ambas porciones son simétricas respecto al eje Ox, se hace el estudio y la representación gráfica de la función de forma similar a la utilizada en los dos ejercicios anteriores.

1. Dominio de definición:

La función está definida para todos los valores reales que hacen positivo o cero el radicando y que no anulan el denominador $\rightarrow \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \geqslant 0$ y $x^2 - 1 \neq 0$.

Como el numerador es positivo para cualquier valor de x, $x^2 + 1 > 0$, la función está definida para $x^2 - 1 > 0 \rightarrow$ dom. (y) = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

2. Simetrías:

La porción positiva y la negativa son simétricas respecto al eje Ox; por tanto, la función es simétrica respecto al eje Ox, ya que $y(x) = -y(x)$.

La función es simétrica respecto al eje Oy, porque $y(x) = y(-x)$.

Como la función es simétrica respecto a los dos ejes coordenados, lo es también respecto al origen; en efecto, $y(x) = -y(-x)$.

3. Periodicidad:

No es función periódica.

4. Continuidad:

La función es continua en todo su dominio de definición.

En los puntos $x = -1$ y $x = 1$ (que no pertenecen al dominio de definición de la función) se puede considerar que existen discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la porción positiva, tanto a la izquierda como a la derecha puesto que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(+ \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} \right) = 1$.

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal de la porción negativa, tanto a la izquierda como a la derecha, porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(- \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} \right) = -1$.

La recta $x = -1$ es asíntota vertical de la porción positiva, únicamente a la izquierda, ya que $\lim\limits_{x \to -1^-} y(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(+ \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} \right) = +\infty$; la recta $x = -1$ es también asíntota vertical de la porción negativa, solamente a la izquierda, porque

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(- \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right) = -\infty.$$

La recta $x = 1$ es asíntota vertical de la porción positiva, sólo a la derecha, puesto que $\lim\limits_{x \to 1^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(+ \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} \right) = +\infty$; la recta $x = 1$ también es asíntota vertical de la porción negativa, únicamente a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to 1^+} y(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(- \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right) = -\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \pm \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ sin raíces reales $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

Con el eje Oy: la curva no corta al eje de coordenadas, porque la función no está definida para $x = 0$.

Con la asíntota $y = 1$: $y = +\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} = 1 \rightarrow x^2 + 1 = x^2 - 1 \rightarrow 1 = -1 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

Con la asíntota $y = -1$: $y = -\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}} = -1 \rightarrow x^2 + 1 = x^2 - 1 \rightarrow 1 = -1 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \pm \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2\, 2\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}} = \pm \frac{-2x}{\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)}}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$

Como $x = 0$ no pertenece al dominio de definición de la función, la curva no presenta extremos relativos.

Son puntos críticos de y los puntos de discontinuidad de y'; es decir, los de abscisas -1 y 1.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, determinados por los puntos críticos en el dominio de definición de y:

x	$(-\infty, -1)$	$(1, +\infty)$
y'	$\pm$	$\mp$

La porción positiva es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$; la porción negativa es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \pm \frac{-2\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)} - \dfrac{3(x^2-1)^2\, 2x(x^2+1) + 2x(x^2-1)^3}{2\sqrt{(x^2-1)^3(x+1)}}(-2x)}{(x^2-1)^3(x^2+1)};$$

$$y'' = \pm \frac{-2(x^2-1)^3(x^2+1) + 6x^2(x^2-1)^2(x^2+1) + 2x^2(x^2-1)^3}{(x^2-1)^3(x^2+1)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)}};$$

$$y'' = \pm \frac{-2(x^2-1)(x^2+1) + 6x^2(x^2+1) + 2x^2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)}};$$

$$y'' = \pm \frac{(-2x^4+2) + (6x^4+6x^2) + (2x^4-2x^2)}{(x^2-1)(x^2+1)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)}};$$

$$y'' = \pm \frac{6x^4+4x^2+2}{(x^2-1)(x^2+1)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)}} = \pm \frac{2(3x^4+2x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)}};$$

$$y'' = 0 \rightarrow 3x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \rightarrow \text{sin raíces reales.}$$

Por tanto, la curva no presenta puntos de inflexión.

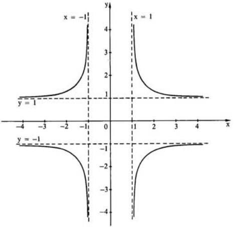
Son puntos críticos de y, de segunda especie, los puntos de discontinuidad de y''; es decir, los de abscisas -1 y 1.

Se estudia el signo de y″ en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, definidos por los puntos críticos de segunda especie en el dominio de definición de y:

x	$(-\infty, -1)$	$(1, +\infty)$
y″	$\pm$	$\pm$

La porción positiva es cóncava y la porción negativa es convexa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



26. $y^2 = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$.

La gráfica de la función propuesta consta de una porción positiva y otra negativa, que corresponden, respectivamente, a una de las dos funciones explícitas $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$. Como ambas porciones son simétricas respecto al eje Ox, se realiza el estudio y la representación gráfica de la función de forma similar a la seguida en los tres ejercicios anteriores.

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales que hacen positivo o cero el radicando y que no anulan el denominador $\rightarrow$ $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \geqslant 0$ y $x^2 - 1 \neq 0$.

Las condiciones anteriores equivalen a uno de los dos siguientes sistemas de inecuaciones:

$$1) \begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 1 > 0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x^2 - 4 \leqslant 0, \\ x^2 - 1 < 0. \end{cases}$$

Solución del sistema 1):

Se resuelve cada inecuación:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geqslant 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2 \text{ y } x \geqslant 2 \\ x < -1 \text{ y } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \\ (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases} \rightarrow (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Solución del sistema 2):

Se resuelve cada inecuación: $\begin{cases} x^2 - 4 \leqslant 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [-2, 2] \\ (-1, 1) \end{cases} \rightarrow (-1, 1).$

El dominio de definición es la unión de las soluciones de ambos sistemas $\rightarrow$ dom. (y) = $= (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$.

2. Simetrías:

La porción positiva y la negativa son simétricas respecto al eje Ox; por tanto, la función es simétrica respecto al eje Ox, ya que $y(x) = -y(x)$.

La función es simétrica respecto al eje Oy, porque $y(x) = y(-x)$.

Al ser la función simétrica respecto a los dos ejes coordenados, lo es también respecto al origen; en fecto, $y(x) = -y(-x)$.

3. Periodicidad:

No es función periódica.

4. Continuidad:

Es función continua en todo su dominio de definición.

En los puntos $x = -1$ y $x = 1$ (que no pertenecen al dominio de definición de la función) se puede considerar que existen discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la porción positiva, tanto a la izquierda como a la derecha,

puesto que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(+ \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \right) = 1.$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal de la porción negativa, tanto a la izquierda como a la derecha, porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(- \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \right) = -1.$

La recta $x = -1$ es asíntota vertical de la porción positiva, únicamente a la derecha, ya que $\lim\limits_{x \to -1^+} y(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(+ \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \right) = +\infty$; la recta $x = -1$ también es asíntota vertical de la porción negativa, solamente a la derecha, porque

$$\lim_{x \to -1^+} y(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(- \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \right) = -\infty.$$

La recta x = 1 es asíntota vertical de la porción positiva, sólo a la izquierda, puesto que

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(+ \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \right) = + \infty;$$ la recta x = 1 es también asíntota vertical de la porción negativa, únicamente a la izquierda, ya que

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(- \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} \right) = -\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2 \rightarrow$

$\rightarrow$ puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \pm 2 \rightarrow$ puntos $(0, -2)$ y $(0, 2)$.

Con la asíntota $y = 1$: $y = + \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} = 1 \rightarrow x^2 - 4 = x^2 - 1 \rightarrow -4 = -1 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

Con la asíntota $y = -1$: $y = - \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}} = -1 \rightarrow x^2 - 4 = x^2 - 1 \rightarrow -4 = -1 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \pm \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 4)}{(x^2 - 1)^2 \, 2 \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}} = \pm \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3 (x^2 - 4)}}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$

Son puntos críticos de y los de abscisas 0 (punto cero de y'), −2, −1, 1 y 2 (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$ determinados por los puntos críticos en el dominio de definición de y:

x	$(-\infty, -2)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(2, +\infty)$
y'	$\mp$	$\mp$	$\pm$	$\pm$

La porción positiva es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-1, 0)$ y creciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$; la porción negativa es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-1, 0)$ y decreciente en los intervalos $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$.

El punto $(0, 2)$ de la porción positiva es un mínimo relativo y el punto $(0, -2)$ de la porción negativa es un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \pm \frac{3\sqrt{(x^2 - 1)^3 (x^2 - 4)} - \frac{3(x^2 - 1)^2 \, 2x(x^2 - 4) + 2x(x^2 - 1)^3}{2\sqrt{(x^2 - 1)^3 (x^2 - 4)}} \, 3x}{(x^2 - 1)^3 (x^2 - 4)};$$

$$y'' = \pm \frac{3(x^2 - 1)^3 (x^2 - 4) - 9x^2(x^2 - 1)^2 (x^2 - 4) - 3x^2 (x^2 - 1)^3}{(x^2 - 1)^3 (x^2 - 4) \sqrt{(x^2 - 1)^3 (x^2 - 4)}};$$

$$y'' = \pm \frac{3(x^2-1)(x^2-4) - 9x^2(x^2-4) - 3x^2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2-4)}};$$

$$y'' = \pm \frac{(3x^4 - 15x^2 + 12) - (9x^4 - 36x^2) - (3x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)(x^2-4)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2-4)}};$$

$$y'' = \pm \frac{-9x^4 + 24x^2 + 12}{(x^2-1)(x^2-4)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2-4)}} = \pm \frac{-3(3x^4 - 8x^2 - 4)}{(x^2-1)(x^2-4)\sqrt{(x^2-1)^3(x^2-4)}};$$

$$y'' = 0 \rightarrow 3x^4 - 8x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64+48}}{6} = \frac{8 \pm 4\sqrt{7}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 \approx 3{,}1;\ x^2 \approx -0{,}43.$$

Así pues, la ecuación bicuadrada tiene en $x_1 \approx -1{,}76$ y $x_2 \approx 1{,}76$ dos raíces reales que no pertenecen al dominio de definición de la función; por tanto, la curva no presenta puntos de inflexión.

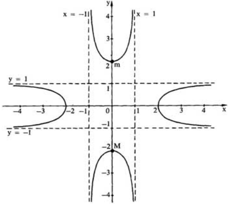
Son puntos críticos de y, de segunda especie, los puntos de discontinuidad de y''; es decir, los de abscisas -2, -1, 1 y 2.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$ y $(2, +\infty)$, definidos por los puntos críticos de segunda especie en el dominio de definición de y:

x	$(-\infty, -2)$	$(-1, 1)$	$(2, +\infty)$
y''	$\mp$	$\pm$	$\mp$

La porción positiva es convexa en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ y cóncava en el intervalo $(-1, 1)$; la porción negativa es cóncava en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-1, 1)$.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



27. $y = e^{-x^2}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función es simétrica respecto al eje Oy, ya que $y(x) = y(-x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

   $$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = e^{-x^2} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = e^0 = 1 \rightarrow$ punto $(0, 1)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $$y' = -2xe^{-x^2}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$

   Es punto crítico de y el de abscisa 0.

   Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, definidos por el punto crítico:

   Para $x < 0, y' > 0$, por tanto, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$; para $x > 0, y' < 0$, es decir, la función es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

   En el punto $(0, 1)$ la función presenta un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

   $$y'' = -(2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1);$$

   $$y'' = 0 \rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

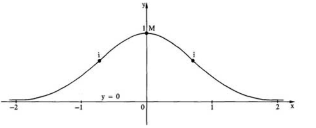
   Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos de segunda especie:

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
y''	+	−	+

   La función es cóncava en los intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y convexa en el intervalo $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



28. $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:
   El conjunto R de los números reales.
2. Simetrías:
   Es función simétrica respecto al eje Oy, ya que $y(x) = y(-x)$.
3. Periodicidad:
   No es función periódica.
4. Continuidad:
   Es función continua en toda la recta real.
5. Ramas parabólicas. Asíntotas:
   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, porque
   $$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$
6. Puntos de corte:
   Con el eje Ox: $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = 0 \rightarrow \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.
   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rightarrow$ punto $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.
7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:
   $$y' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2}; \quad y' = 0 \rightarrow x = 0.$$
   Es punto crítico de y el de abscisa 0.

Se estudia el signo de y' en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, definidos por el punto crítico:

Para $x < 0$, $y' > 0$, por tanto, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$; para $x > 0$, $y' < 0$, es decir, la función es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

El punto $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ es un máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\left(x^2 - 1\right);$$

$$y'' = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas -1 y 1.

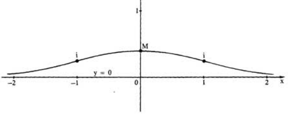
Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos de segunda especie:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	+	−	+

La función es cóncava en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y convexa en el intervalo $(-1, 1)$.

Los puntos $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ y $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$ son puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



Nota: Esta curva recibe el nombre de *curva* o *campana de Gauss* y representa la función de densidad de la distribución normal de probabilidad, que tiene gran importancia en el estudio de los fenómenos de azar.

29. $y = \frac{1}{1 + e^{-(1 + 2x)}}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, únicamente a la izquierda, puesto que

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0.$$

   La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, solamente a la derecha, ya que $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 1$.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \dfrac{1}{1 + e^{-(1 + 2x)}} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{1 + e^{-1}} \rightarrow$ punto $\left(0, \dfrac{1}{1 + e^{-1}}\right) \approx (0; 0{,}73)$.

   Con la asíntota $y = 1$: $y = \dfrac{1}{1 + e^{-(1 + 2x)}} = 1 \rightarrow 1 = 1 + e^{-(1 + 2x)} \rightarrow$

   $\rightarrow 0 = e^{-(1 + 2x)} \rightarrow$ sin solución $\rightarrow$ la curva no corta a la asíntota.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{2e^{-(1 + 2x)}}{[1 + e^{-(1 + 2x)}]^2}; \quad y' = 0 \rightarrow e^{-(1 + 2x)} = 0 \rightarrow \text{sin solución.}$$

   Por consiguiente, la curva no presenta extremos relativos.

   Se estudia el signo de y':

   Como en toda la recta real del numerador y el denominador de y' son siempre positivos, $y' > 0$; por tanto, la función es creciente en todo su dominio de definición.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{-4e^{-(1 + 2x)}\,[1 + e^{-(1 + 2x)}]^2 + 4\,[1 + e^{-(1 + 2x)}]\, e^{-(1 + 2x)}\, 2e^{-(1 + 2x)}}{[1 + e^{-(1 + 2x)}]^4};$$

$$y'' = \frac{4e^{-(1 + 2x)}\,(2e^{-(1 + 2x)} - [1 + e^{-(1 + 2x)}])}{[1 + e^{-(1 + 2x)}]^3} = \frac{4e^{-(1 + 2x)}\,[e^{-(1 + 2x)} - 1]}{[1 + e^{-(1 + 2x)}]^3};$$

$$y'' = 0 \rightarrow e^{-(1 + 2x)} - 1 = 0 \rightarrow e^{-(1 + 2x)} = 1 \rightarrow 1 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

   Es punto crítico de y, de segunda especie, el de abscisa $-\dfrac{1}{2}$.

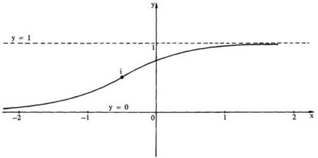
   Se estudia el signo de y'' en los intervalos $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, determinados por el punto crítico de segunda especie [obsérvese que el signo de y'' es el signo de $e^{-(1 + 2x)} - 1$]:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
y''	+	−

La función es cóncava en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y convexa en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

El punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



30. $y = 1 + \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 1$ es asíntota horizontal, únicamente a la izquierda, puesto que $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = 1$.

   La recta $y = 2$ es asíntota horizontal, solamente a la derecha, ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 2$.

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = 1 + \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 0 \rightarrow \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = -1 \rightarrow -2 = e^{-x} \rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 1 + \dfrac{1}{1 + e^{-0}} = \dfrac{3}{2} \rightarrow$ punto $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}; \quad y' = 0 \rightarrow e^{-x} = 0 \rightarrow \text{sin solución.}$$

Por tanto, la curva no presenta extremos relativos.

Se estudia el signo de y'.

Como para todos los valores reales de la variable x el numerador y el denominador de y' son siempre positivos, resulta que $y' > 0$; por consiguiente, la función es creciente en todo su dominio de definición.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{-e^{-x}(1 + e^{-x})^2 - 2e^{-x}(1 + e^{-x})(-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^4} = \frac{-e^{-x} + 2e^{-x}e^{-x}}{(1 + e^{-x})^3} = \frac{e^{-x}(2e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3};$$

$$y'' = 0 \rightarrow e^{-x}(2e^{-x} - 1) = 0 \rightarrow 2e^{-x} - 1 = 0 \rightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2 \approx 0{,}69.$$

Es punto crítico de y, de segunda especie, el de abscisa ln 2.

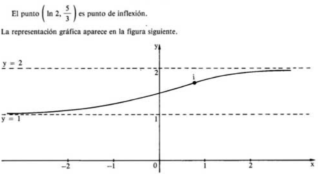
Se estudia el signo de y'' en los intervalos $(-\infty, \ln 2)$ y $(\ln 2, +\infty)$, determinados por el punto crítico de segunda especie [obsérvese que el signo de y'' es el signo de $2e^{-x} - 1$]:

x	$(-\infty, \ln 2)$	$(\ln 2, +\infty)$
y''	+	−

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, \ln 2)$ y convexa en el intervalo $(\ln 2, +\infty)$.

El punto $\left(\ln 2, \dfrac{5}{3}\right)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



31. $y = \dfrac{\ln(x-1)}{x}$.

1. Dominio de definición:

   La función está definida para aquellos valores de la variables que hacen que sea positivo el argumento del logaritmo y que no anulan el denominador; es decir,

   $$x - 1 > 0 \text{ y } x \neq 0 \ \rightarrow \ x > 1 \ \rightarrow \ \text{dom. } (y) = (1, +\infty).$$

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en todo su dominio de definición.

   En el punto $x = 1$ (que no pertenece al dominio de definición de la función) se puede considerar que existe una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, únicamente a la derecha, puesto que

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = 0.$$

   La recta $x = 1$ es asíntota vertical, solamente a la derecha, ya que $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{x} = -\infty$.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox:

   $$y = \frac{\ln(x-1)}{x} = 0 \ \rightarrow \ \ln(x-1) = 0 \ \rightarrow \ x - 1 = 1 \ \rightarrow \ x = 2 \ \rightarrow \ \text{punto } (2, 0).$$

   Con el eje Oy: para $x = 0$ no está definida la función; por tanto, la curva no corta al eje de ordenadas.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $$y' = \frac{\dfrac{x}{x-1} - \ln(x-1)}{x^2} = \frac{x - (x-1)\ln(x-1)}{x^2(x-1)};$$

   $$y' = 0 \ \rightarrow \ x - (x-1)\ln(x-1) = 0.$$

   La ecuación $y' = 0$ es una ecuación transcendente que se resuelve por tanteo, obteniéndose una solución $x \approx 4{,}6$. (Estudiando la función $y = x - (x-1)\ln(x-1)$ y haciendo su representación gráfica se observa que dicha solución es única.)

   Son puntos críticos de y los de abscisas 4,6 (punto cero de y'), 0 y 1 (discontinuidades de y').

   Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos de y en su dominio de definición:

x	(1; 4,6)	(4,6; $+\infty$)
y'	+	−

La función es creciente en el intervalo (1; 4,6) y decreciente en el intervalo (4,6; + ∞).

El punto (4,6; 0,27) es mínimo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{\left(1 - \ln(x-1) - \dfrac{x-1}{x-1}\right)\cdot(x^3 - x^2) - (3x^2 - 2x)(x - (x-1)\ln(x-1))}{(x^3 - x^2)^2};$$

$$y'' = \frac{-\ln(x-1)(x^3 - x^2) - (3x^3 - 2x^2) + (3x^3 - 5x^2 + 2x)\ln(x-1)}{(x^3 - x^2)^2};$$

$$y'' = \frac{\ln(x-1)\cdot(3x^3 - 5x^2 + 2x - x^3 + x^2) - (3x^3 - 2x^2)}{(x^3 - x^2)^2};$$

$$y'' = \frac{(2x^3 - 4x^2 + 2x)\ln(x-1) - (3x^3 - 2x^2)}{x^4(x-1)^2};$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 2x + 1)\ln(x-1) - x(3x^2 - 2x)}{x^4(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2\ln(x-1) - (3x^2 - 2x)}{x^3(x-1)^2}.$$

$$y'' = 0 \rightarrow 2(x-1)^2\ln(x-1) - (3x^2 - 2x) = 0.$$

La ecuación $y'' = 0$ es una ecuación transcendente que se resuelve por tanteo, y resulta una solución para $x \approx 7{,}2$. (Estudiando la función $y = 2(x-1)^2\ln(x-1) - (3x^2 - 2x)$ y haciendo su representación gráfica se observa que dicha solución es única.)

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas 7,2 (punto cero de y''), 0 y 1 (discontinuidades de y'').

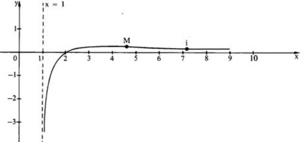
Se estudia el signo de y'' en los intervalos definidos por los puntos críticos de segunda especie en el dominio de definición de la función:

x	(1; 7,2)	(7,2; + ∞)
y''	−	+

La función es convexa en el intervalo (1; 7,2) y cóncava en el intervalo (7,2; + ∞).

El punto (7,2; 0,25) es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



32. $y = \log \frac{x+2}{x-2}$.

1. Dominio de definición:

   La función está definida para los valores reales que hacen positivo el argumento del logaritmo; es decir, $\frac{x+2}{x-2} > 0$, y no anulan el denominador.

   La condición anterior equivale a uno de los dos siguientes sistemas de inecuaciones:

   $$1)\ \begin{cases} x+2>0, \\ x-2>0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+2<0, \\ x-2<0. \end{cases}$$

   Solución del sistema 1):

   Se resuelve cada inecuación: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases} \rightarrow x>2 \rightarrow (2, +\infty)$.

   Solución del sistema 2):

   Se resuelve cada inecuación: $\begin{cases} x+2<0 \\ x-2<0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x<2 \end{cases} \rightarrow x<-2 \rightarrow (-\infty, -2)$.

   El dominio de definición de la función es la unión de las soluciones de ambos sistemas; por tanto, dom. $(y) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función es simétrica respecto al origen, ya que:

   $$y(-x) = \log \frac{-x+2}{-x-2} = \log \frac{-(x-2)}{-(x+2)} = \log \frac{x-2}{x+2} = -\log \frac{x+2}{x-2} = -y(x).$$

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en todo su dominio de definición.

   En los puntos $x = -2$ y $x = 2$ se puede considerar que existen sendas discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \log 1 = 0$.

   La recta $x = -2$ es asíntota vertical, únicamente a la izquierda, puesto que $\lim\limits_{x \to -2^-} y(x) = -\infty$.

   La recta $x = 2$ es asíntota vertical, solamente a la derecha, ya que $\lim\limits_{x \to 2^+} y(x) = +\infty$.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \log \frac{x+2}{x-2} = 0 \rightarrow \frac{x+2}{x-2} = 1 \rightarrow x+2 = x-2 \rightarrow 2 = -2 \rightarrow$

   $\rightarrow$ imposible $\rightarrow$ la curva no corta al eje de abscisas.

   Con el eje Oy: para $x = 0$ no está definida la función; por tanto, la curva no corta al eje de ordenadas.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y = \log \frac{x+2}{x-2} = \log(x+2) - \log(x-2) \rightarrow y' = (\log e)\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right);$$

$$y' = (\log e)\left(\frac{x-2-x-2}{x^2-4}\right) = (\log e)\left(\frac{-4}{x^2-4}\right);$$

$$y' = 0 \rightarrow \frac{-4}{x^2-4} = 0 \rightarrow -4 = 0 \rightarrow \text{imposible.}$$

Son puntos críticos de y los de abscisas -2 y 2 (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos en el dominio de definición de la función.

x	$(-\infty, -2)$	$(2, +\infty)$
y'	$-$	$-$

Así pues, la función es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$.

8. Intervalos de concavidad. Extremos relativos:

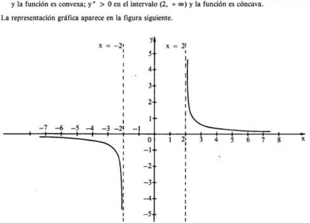
$$y'' = (\log e)\left(\frac{8x}{(x^2-4)^2}\right); \quad y'' = 0 \rightarrow 8x = 0 \rightarrow x = 0.$$

Como $x = 0$ no pertenece al dominio de definición de la función, la curva no presenta puntos de inflexión.

Se estudia el signo de y'' en el dominio de definición de la función.

Puesto que el signo de y'' coincide con el signo de x, resulta que $y'' < 0$ en el intervalo $(-\infty, -2)$ y la función es convexa; $y'' > 0$ en el intervalo $(2, +\infty)$ y la función es cóncava.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



33. $y = \ln \dfrac{x^2}{2x+1}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   La función está definida para aquellos valores de la variable que hacen positivo el argumento del logaritmo; es decir, $\dfrac{x^2}{2x+1} > 0$.

   La condición anterior equivale a uno de los dos siguientes sistemas de inecuaciones:

   $$1)\ \begin{cases} x^2 > 0, \\ 2x+1 > 0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x^2 < 0, \\ 2x+1 < 0. \end{cases}$$

   Solución del sistema 1):

   $$\begin{cases} x^2 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty).$$

   Solución del sistema 2):

   El sistema 2) carece de solución, ya que un cuadrado nunca puede ser negativo.

   Así pues, el dominio de definición de la función es la unión de las soluciones de ambos sistemas; por tanto, dom. (y) $= \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   Es función continua en todo su dominio de definición. En los puntos $x = -\dfrac{1}{2}$ y $x = 0$ presenta discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2(x+1)}{x(2x+1)} = 0$, la curva presenta una rama parabólica en el sentido positivo del eje Ox.

   La recta $x = -\dfrac{1}{2}$ es asíntota vertical, solamente a la izquierda, ya que $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} y(x) = +\infty$.

   La recta $x = 0$ es asíntota vertical, tanto a la izquierda como a la derecha, porque

   $$\lim_{x \to 0^-} y(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0^+} y(x) = -\infty.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \ln \dfrac{x^2}{2x+1} = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{2x+1} = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow$

   $\rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41;\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41 \rightarrow$ puntos (0; –0,41) y (0; 2,41).

   Con el eje Oy: para $x = 0$ la función no está definida; por tanto, la curva no corta al eje de ordenadas.

7. Intervalo de crecimiento. Extremos relativos:

$$y = \ln \frac{x^2}{2x+1} = 2\ln x - \ln(2x+1) \rightarrow y' = \frac{2}{x} - \frac{2}{2x+1};$$

$$y' = \frac{4x + 2 - 2x}{x(2x+1)} = \frac{2(x+1)}{x(2x+1)};$$

$y' = 0 \rightarrow 2(x+1) = 0 \rightarrow x = -1$ (valor que no pertenece al dominio de definición de la función).

Por consiguiente, la curva no presenta extremos relativos.

Son puntos críticos de y los de abscisas -1 (punto cero de y'), 0 y $-\frac{1}{2}$ (discontinuidades de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos de y en el dominio de definición de la función:

x	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$-$	$+$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, y creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{2(2x^2 + x) - 2(4x+1)(x+1)}{(2x^2+x)^2} = \frac{2(2x^2 + x - 4x^2 - 5x - 1)}{x^2(2x+1)^2};$$

$$y'' = \frac{-2(x^2 + 4x + 1)}{x^2(2x+1)^2};$$

$y'' = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{3} \approx -0{,}27;\ x_2 = -2 - \sqrt{3} \approx 3{,}73.$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas $-2 + \sqrt{3}$, $-2 - \sqrt{3}$ (puntos cero de y''), 0 y $-\frac{1}{2}$ (discontinuidades de y'').

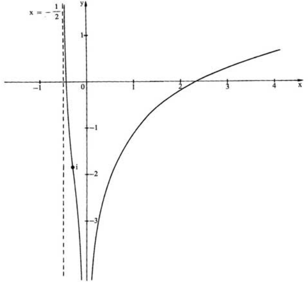
Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos de segunda especie en el dominio de definición de la función:

x	$(-0{,}5; -0{,}27)$	$(-0{,}27; 0)$	$(0, +\infty)$
y''	$+$	$-$	$-$

La función es cóncava en el intervalo $(-0{,}5; -0{,}27)$ y convexa en los intervalos $(-0{,}27; 0)$ y $(0, +\infty)$.

El punto $(-0{,}27; -1{,}84)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



34. $y = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función presenta las simetrías propias de la función «coseno» desplazada; por tanto, es simétrica respecto a las rect: ; $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ y respecto a los puntos $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

3. Periodicidad:

   Es función periódica, de período $T = 2\pi$.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La función carece de ramas parabólicas y asíntotas.

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow$

$\rightarrow$ puntos $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \sqrt{2} \rightarrow$ punto $(0, \sqrt{2})$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = -2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right);\ y' = 0 \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k \in Z.$$

Se estudia el signo de y' en los intervalos que determinan los puntos críticos de y en el período $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$:

x	$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$
y'	−	+

Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es creciente en los intervalos $\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi, \frac{7\pi}{4} + k2\pi\right)$ y decreciente en los intervalos $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi\right)$, para $k \in Z$.

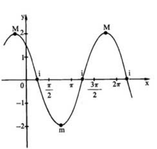
La función presenta máximos en los puntos $\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi, 2\right)$ y mínimos en los puntos $\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi, -2\right)$, para $k \in Z$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right);\ y'' = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k \in Z.$$

Se estudia el signo de y'' en los intervalos que determinan los puntos críticos de y, de segunda especie, en el período $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$.

x	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$
y''	−	+



Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es convexa en los intervalos $\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{5\pi}{4} + k2\pi\right)$ y cóncava en los intervalos $\left(\frac{5\pi}{4} + k2\pi, \frac{9\pi}{4} + k2\pi\right)$, para $k \in Z$.

Son puntos de inflexión los puntos $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

La representación gráfica es la que aparece en la figura anterior.

35. $y = 2 \cdot \cos(x + \pi)$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función presenta las simetrías propias de la función «coseno» desplazada; por tanto, es simétrica respecto a las rectas $x = k\pi$ y respecto a los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

3. Periodicidad:

   Es función periódica, de período $T = 2\pi$.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La función no presenta ni ramas parabólicas ni asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \cos(x + \pi) = 0 \rightarrow x + \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow$ puntos $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, se tiene $y = 2\cos\pi = -2 \rightarrow$ punto $(0, -2)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $y' = -2\,\text{sen}\,(x + \pi)$; $y' = 0 \rightarrow x + \pi = k\pi \rightarrow x = k\pi$, para $k \in Z$.

   Se estudia el signo de y' en los intervalos que determinan los puntos críticos de y en el período $[0, 2\pi)$.

x	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
y'	+	−

   Extendiendo estos resultados por periodicidad, se tiene que la función es creciente en los intervalos $(k2\pi, \pi + k2\pi)$ y decreciente en los intervalos $(\pi + k2\pi, 2(k + 1)\pi)$, para $k \in Z$.

   Son mínimos los puntos $(k2\pi, -2)$ y máximos los puntos $(\pi + k2\pi, 2)$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = -2\cos(x + \pi);\ y'' = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ para } k \in Z.$$

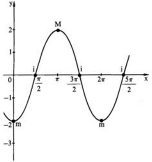
Se estudia el signo de y″ en los intervalos que determinan los puntos críticos de y, de segunda especie, en el período $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$.

x	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$
y″	−	+

Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es convexa en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ y cóncava en los intervalos $\left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi, \frac{5\pi}{2} + k2\pi\right)$, para $k \in Z$.

Son puntos de inflexión los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.



36. $y = 3 \text{ sen } 2x$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función presenta las simetrías propias de la función «seno»; por tanto, es simétrica respecto a las rectas $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ y respecto a los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

3. Periodicidad:

   La función es periódica, de período $T = \pi$.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La función carece de ramas parabólicas y asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = 3 \text{ sen } 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = k\frac{\pi}{2} \rightarrow$ puntos $\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$, para $k \in Z$.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 0 \rightarrow$ punto $(0, 0)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = 6 \cos 2x; \quad y' = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ para } k \in Z.$$

Se estudia el signo de y' en los intervalos que determinan los puntos críticos de y en el período $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

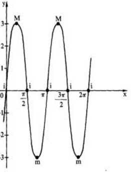
x	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$
y'	−	+

Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es decreciente en los intervalos $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$ y creciente en los intervalos $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi\right)$, para $k \in Z$.

Son máximos los puntos $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 3\right)$ y mínimos los puntos $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, -3\right)$, para $k \in Z$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = -12 \operatorname{sen} 2x;\quad y'' = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = k\frac{\pi}{2},\ \text{para } k \in Z.$$



Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos de y, de segunda especie, en el período $[0, \pi)$.

x	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
y''	−	+

Extendiendo estos resultados por periodicidad, se tiene que la función es convexa en los intervalos $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ y cóncava en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$, para $k \in Z$.

Son puntos de inflexión los puntos $\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$, para $k \in Z$.

La representación grafica aparece en la figura anterior.

37. $y = \operatorname{sen} \dfrac{x - \pi}{4}$.

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función presenta las simetrías propias de la función «seno» desplazada; por tanto, es simétrica respecto de las rectas $x = (4k - 1)\pi$ y respecto a los puntos $((4k + 1)\pi, 0)$, para $k \in Z$.

3. Periodicidad:

   Es función periódica de período $T = 8\pi$.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La función carece de ramas parabólicas y asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \operatorname{sen} \frac{x - \pi}{4} = 0 \rightarrow \frac{x - \pi}{4} = k\pi \rightarrow x = (4k - 1)\pi \rightarrow$

   $\rightarrow$ puntos $((4k - 1)\pi, 0)$, para $k \in Z$.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \operatorname{sen} \frac{-\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ punto $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $$y' = \frac{1}{4} \cos \frac{x - \pi}{4}; \quad y' = 0 \rightarrow \frac{x - \pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = (4k + 3)\pi, \text{ para } k \in Z.$$

   Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos de y en el período $[-\pi, 7\pi)$.

x	$(-\pi, 3\pi)$	$(3\pi, 7\pi)$
y'	+	−

   Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es creciente en los intervalos $((8k - 1)\pi, (8k + 3)\pi)$ y decreciente en los intervalos $((8k + 3)\pi, (8k + 7)\pi)$, para $k \in Z$.

   Son máximos los puntos $((8k + 3)\pi, 1)$ y mínimos los puntos $((8k - 1)\pi, -1)$, para $k \in Z$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

   $$y'' = -\frac{1}{16} \operatorname{sen} \frac{x - \pi}{4};$$

   $$y'' = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x = (4k + 1)\pi, \text{ para } k \in Z.$$

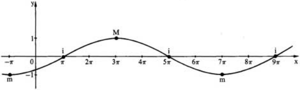
   Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos, de segunda especie, en el período $[\pi, 9\pi)$.

x	$(\pi, 5\pi)$	$(5\pi, 9\pi)$
y''	−	+

   Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es convexa en los intervalos $((8k + 1)\pi, (8k + 5)\pi)$ y cóncava en los intervalos $((8k + 5)\pi, (8k + 9)\pi)$, para $k \in Z$.

   Son puntos de inflexión los puntos $((4k + 1)\pi, 0)$, para $k \in Z$.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



Nota: En los ejercicios **34, 35, 36** y **37** se propone el estudio de funciones del tipo *oscilación armónica:*

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x + \varphi).$$

Los elementos de una oscilación armónica son:

- A: *amplitud;* $|A|$ representa la máxima elongación.
- ω: *frecuencia;* determina el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ de la oscilación.
- φ: *desfase;* supone una traslación de la curva $y = \operatorname{sen} \omega x$ a la izquierda del eje de ordenadas una longitud $\frac{\varphi}{\omega}$.

Obsérvese que el desfase permite reducir oscilaciones definidas por la función coseno a oscilaciones sinusoidales, ya que $y = A\cos(\omega x + \varphi) = A \operatorname{sen}\left(\omega x + \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

38. $y = \operatorname{sen}^2 2x$.

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función es simétrica respecto a las rectas $x = k\frac{\pi}{2}$, para $k \in Z$.

3. Periodicidad:

   Es función periódica de período $T = \frac{\pi}{2}$, ya que

   $$\operatorname{sen}^2 2x = \operatorname{sen}^2 (2x + T) \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \pm \operatorname{sen}(2x + T) \rightarrow T = \frac{\pi}{2}.$$

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La curva no presenta ramas parabólicas ni asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \operatorname{sen}^2 2x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = k\frac{\pi}{2} \rightarrow$
   $\rightarrow$ puntos $\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$, para $k \in Z$.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 0 \rightarrow$ punto $(0, 0)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $$y' = 4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x = 2 \operatorname{sen} 4x; \quad y' = 0 \rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = k\frac{\pi}{4}, \text{ para } k \in Z.$$

   Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos de y en el período $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

x	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
y'	+	−

Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es creciente en los intervalos $\left(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$ y decreciente en los intervalos $\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, para $k \in Z$.

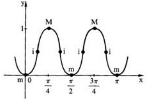
Son mínimos los puntos $\left(k\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y máximos los puntos $\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, 1\right)$, para $k \in Z$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = 8\cos 4x; \quad y'' = 0 \rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \text{ para } k \in Z.$$

Se estudia el signo de y'' en los intervalos que determinan los puntos críticos de y, de segunda especie, en el período $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$.

x	$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$
y''	$-$	$+$



Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es convexa en los intervalos $\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)$ y cóncava en los intervalos $\left(\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)$, para $k \in Z$.

Son puntos de inflexión los puntos $\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, para $k \in Z$.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.

39. $y = \cos^2\frac{x}{2}$.

1. Dominio de definición:
   El conjunto R de los números reales.
2. Simetrías:
   La función es simétrica respecto de las rectas $x = k\pi$, para $k \in Z$.
3. Periodicidad:
   Es función periódica de período $T = 2\pi$.
4. Continuidad:
   La función es continua en toda la recta real.
5. Ramas parabólicas. Asíntotas:
   La curva carece de ramas parabólicas y asíntotas.
6. Cortes con los ejes:
   Con el eje Ox: $y = \cos^2\frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \pi + k2\pi \rightarrow$ puntos $(\pi + k2\pi, 0)$, para $k \in Z$.

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 1 \rightarrow$ punto $(0, 1)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = -\cos\frac{x}{2}\,\text{sen}\,\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x;\quad y' = 0 \rightarrow x = k\pi,\ \text{para } k \in Z.$$

Se estudia el signo de y' en los intervalos que determinan los puntos críticos de y en el período $[0, 2\pi)$.

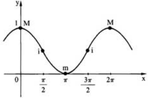
x	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
y'	−	+

Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es decreciente en los intervalos $(k2\pi, \pi + k2\pi)$ y creciente en los intervalos $(\pi + k2\pi, (k + 1)\,2\pi)$, para $k \in Z$.

Son máximos los puntos $(k2\pi, 1)$ y mínimos los puntos $(\pi + k2\pi, 0)$, para $k \in Z$.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = -\frac{1}{2}\cos x;\quad y'' = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{para } k \in Z.$$



Se estudia el signo de y'' en los intervalos que determinan los puntos críticos de y, de segunda especie, en el período $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$.

x	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$
y''	+	−

Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es cóncava en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ y convexa en los intervalos $\left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi, \frac{5\pi}{2} + k2\pi\right)$, para $k \in Z$.

Son puntos de inflexión los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{1}{2}\right)$, para $k \in Z$.

La representación gráfica aparece en la figura anterior.

40. $y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

La función está definida para todos los valores de la variable, salvo para aquellos valores del argumento para los que la función tangente no está definida; es decir:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \text{para } k \in Z.$$

2. Simetrías:

La función presenta las simetrías propias de la función «tangente» desplazada hacia la izquierda una longitud $\frac{\pi}{4}$; por tanto, la función es simétrica respecto a los puntos $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

3. Periodicidad:

Es función periódica de período $T = \pi$.

4. Continuidad:

La función es continua en toda la recta real, salvo en $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, para $k \in Z$, donde presenta discontinuidades de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

Son asíntotas verticales, tanto a la derecha como a la izquierda, las rectas $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, para $k \in Z$.

Si x_k es un punto de discontinuidad de la función, resulta que

$$\lim_{x \to x_k^-} y(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to x_k^+} y(x) = -\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow$ puntos $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \rightarrow$ punto $(0, 1)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = 1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \quad y' = 0 \rightarrow \text{sin solución.}$$

Por consiguiente, la curva carece de extremos relativos.

Para cualquier valor de x en el dominio de definición de la función resulta que $y' > 0$; por tanto, la función es creciente en todo su dominio de definición.

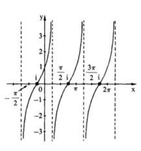
8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]; \quad y'' = 0 \rightarrow \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ para } k \in Z.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ (puntos cero de y'') y $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (discontinuidades de y''). En definitiva, son puntos críticos de segunda especie los puntos de abscisas $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, para $k \in Z$.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por los puntos críticos de y, de segunda especie, en el período $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.



x	$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$
y''	+	−

Extendiendo por periodicidad estos resultados, se tiene que la función es cóncava en los intervalos $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ y convexa en los intervalos $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$, para $k \in Z$.

Son puntos de inflexión los puntos $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, para $k \in Z$.

La representación gráfica aparece en la figura adjunta.

41. $y = \frac{\text{sen } x}{x}$.

1. Dominio de definición:

   La función está definida para todos los valores reales de la variable, salvo para $x = 0$, valor que anula el denominador; por tanto, dom. $(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La curva es simétrica respecto al eje Oy, ya que $y(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\text{sen } x}{-x} = y(x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad evitable; puesto que, aunque no está definida la función en dicho punto, $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a derecha como a izquierda, ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0.$$

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \frac{\text{sen } x}{x} = 0 \rightarrow \text{sen } x = 0$ y $x \neq 0 \rightarrow x = k\pi$, para $k \in Z - \{0\}$.

   Con el eje Oy: para $x = 0$ la función no está definida, aunque se puede completar de forma continua asignándole el valor $y(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$; en este caso, la curva corta al eje de ordenadas en el punto $(0, 1)$.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{x \cos x - \text{sen } x}{x^2}; \quad y' = 0 \rightarrow x \cos x - \text{sen } x = 0, x \neq 0 \rightarrow x = \text{tg } x, x \neq 0.$$

La ecuación $x = \operatorname{tg} x$ es una ecuación transcendente que posee infinitas soluciones α_k, una en cada uno de los períodos de la función tangente; es decir, $\alpha_k \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, para $k \in Z$.

Por tanteo se tiene que $\alpha_1 \approx 4{,}49$. Para estimar el valor de otras soluciones α_k se observa, estudiando las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función tangente con la bisectriz del primer cuadrante, que para valores de k superiores en valor absoluto a dos, se tiene que $\alpha_k \approx \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Son puntos críticos de y los de abscisas α_k, para $k \in Z$.

Se estudia el signo de y′ en los intervalos determinados por los puntos críticos, resultando que la función es decreciente en los intervalos $(\alpha_{-2}, \alpha_{-1})$, $(0, \alpha_1)$, (α_2, α_3), etc.; y creciente en los intervalos $(\alpha_{-1}, 0)$, (α_1, α_2), (α_3, α_4), etc.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

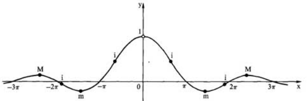
$$y'' = \frac{x^2(\cos x - x \operatorname{sen} x - \cos x) - 2x(x \cos x - \operatorname{sen} x)}{x^4};$$

$$y'' = \frac{-x^2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x + 2 \operatorname{sen} x}{x^3};$$

$$y'' = 0 \rightarrow x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - \operatorname{sen} x = 0, x \neq 0.$$

La ecuación $y'' = 0$ es una ecuación transcendente cuyo estudio minucioso excede el propósito del presente ejercicio. Por tanteo se puede calcular, por ejemplo, que $x_1 = 2{,}08$ y $x_2 = 5{,}94$ son dos de sus soluciones; y, por tanto, son dos de los puntos de inflexión (2,08; 0,42) y (5,94; −0,057).

La gráfica de la función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, que aparece en la figura siguiente, representa una *oscilación amortiguada.*



42. $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

La función *arco seno* es la inversa de la función seno; es decir, $y = \operatorname{arc\,sen} x \leftrightarrow x = \operatorname{sen} y$. Según esta definición no se trata en sentido estricto de una función, sino de una correspondencia multívoca, pues a un valor de la variable x le corresponde una infinidad de valores de y; es por esto por lo que, para garantizar la univocidad de la correspondencia $y = \operatorname{arc\,sen} x$ de forma que defina precisamente una función, debe considerarse que los valores de la función son tales que $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Dominio de definición:

   Puesto que la función seno toma valores entre -1 y 1, resulta que dom. (y) = $[-1, 1]$.

2. Simetrías:

   La función es simétrica respecto al origen, ya que $y(-x) = \text{arc sen }(-x) = -\text{arc sen } x = -y(x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en todo su dominio de definición.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La función carece de ramas parabólicas y asíntotas.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \text{arc sen } x = 0 \rightarrow x = \text{sen } 0 = 0 \rightarrow$ punto (0, 0).

   Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = \text{arc sen } 0 = 0 \rightarrow$ punto (0, 0).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad y' = 0, \text{ no tiene solución.}$$

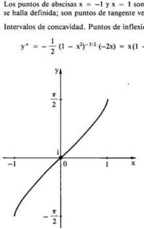
   Por consiguiente, la función carece de extremos relativos.

   Para $x \in (-1, 1)$, se tiene que $y' > 0$ (ver nota al final del ejercicio) y, por tanto, es creciente en dicho intervalo.

   Los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$ son puntos singulares en los que la primera derivada no se halla definida; son puntos de tangente vertical.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-3/2}(-2x) = x(1 - x^2)^{-3/2} = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}; \quad y'' = 0 \rightarrow x = 0.$$



Es punto crítico de y, de segunda especie, el de abscisa 0.

Se estudia el signo de y'' en los intervalos determinados por el punto crítico, de segunda especie, en el dominio de definición de la función.

x	(−1, 0)	(0, 1)
y″	−	+

La función es convexa en el intervalo (−1, 0) y cóncava en el intervalo (0, 1).

El punto (0, 0) es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura adjunta (obsérvese que es la simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante de la gráfica de la función seno).

Nota: Teniendo en cuenta que la función y = arc sen x viene definida por la relación x = sen y, derivando esta expresión implícitamente, resulta:

$$1 = y' \cos y = y' \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = y' \sqrt{1 - x^2} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Si los valores de y son tales que $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, entonces en la fórmula $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$ la raíz debe tomarse con signo positivo.

43. y = arc tg x.

La función *arco tangente* es la inversa de la función tangente; es decir, $y = \text{arc tg } x \leftrightarrow x = \text{tg } y$. Según esta definición no se trata de una función en sentido estricto, sino de una correspondencia multívoca, pues a un valor de la variable x le corresponde una infinidad de valores de y; es por esto por lo que, para garantizar la univocidad de la correspondencia y = arc tg x de forma que defina realmente una función, debe considerarse que los valores de la función son tales que $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

1. Dominio de definición:

   El conjunto R de los números reales.

2. Simetrías:

   La función es simétrica respecto al origen, ya que $y(-x) = \text{arc tg }(-x) = -\text{arc tg}(x) = -y(x)$.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en toda la recta real.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La recta $y = \frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal a la derecha, ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{arc tg } x = \frac{\pi}{2}$.

   La recta $y = -\frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal a la izquierda, puesto que $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{arc tg } x = -\frac{\pi}{2}$.

6. Puntos de corte:

   Con el eje Ox: $y = \text{arc tg } x = 0 \rightarrow x = \text{tg } 0 = 0 \rightarrow$ punto (0, 0).

   Con el eje Oy: para x = 0, resulta $y = \text{arc tg } 0$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow y = 0 \rightarrow$ punto (0, 0).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

   $$y' = \frac{1}{1 + x^2}; \quad y' = 0, \text{ no tiene solución.}$$

   Por consiguiente, la función carece de extremos relativos.

   La función es creciente en todo su dominio de definición, pues y' > 0 para todos los valores de la variable.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

   $$y'' = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}; \quad y'' = 0 \rightarrow x = 0.$$

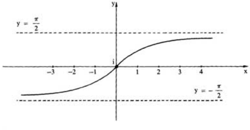
Es punto crítico de y, de segunda especie, el de abscisa 0.

Se estudia el signo de y″ en los intervalos determinados por el punto crítico, de segunda especie.

En el intervalo $(-\infty, 0)$ el signo de y″ es positivo, y, por tanto, la función es cóncava. En el intervalo $(0, +\infty)$ el signo de y″ es negativo y, por tanto, la función es convexa.

El punto (0, 0) es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente (obsérvese que es la simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante de la gráfica de la función tangente).



44. $y = x \cdot \ln x$.

1. Dominio de definición:

   La función está definida para aquellos valores de la variable que hacen positivo el argumento del logaritmo; por consiguiente, dom. (y) $= (0, +\infty)$.

2. Simetrías:

   La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

   No es función periódica.

4. Continuidad:

   La función es continua en todo su dominio de definición.

   En el punto $x = 0$ la función presenta una discontinuidad evitable; ya que, aunque en dicho punto no se halla definida la función, sí existe el límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0^-.$$

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

   La curva presenta una rama parabólica según el sentido positivo del eje Oy; puesto que,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x} = +\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = x \ln x = 0 \rightarrow x = 0$ (fuera del dominio de definición), $\ln x = 0 \rightarrow$ $\rightarrow x = 1 \rightarrow$ punto (1, 0).

Con el eje Oy: para $x = 0$ no está definida la función; por tanto, la curva no corta al eje de ordenadas.

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = 1 + \ln x;\quad y' = 0 \rightarrow 1 + \ln x = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1}.$$

Es punto crítico de y el de abscisa e^{-1}.

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados en el dominio de definición de la función por el punto crítico de y.

En el intervalo $(0, e^{-1})$ el signo de y' es negativo y, por tanto, la función es decreciente. En el intervalo $(e^{-1}, +\infty)$ el signo de y' es positivo; y por consiguiente, la función es creciente.

El punto $(e^{-1}, -e^{-1})$ es mínimo relativo de la función.

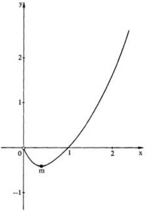
8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{1}{x};\quad y'' = 0, \text{ no tiene solución.}$$

En todo el dominio de definición de la función, y'' es positiva; y por consiguiente, la función es convexa.

La función no presenta puntos de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura adjunta.



45. $y = \dfrac{2x}{(x + 1)^2}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

1. Dominio de definición:

La función está definida para todos los valores reales, salvo los que anulan el denominador $\rightarrow$ $\rightarrow (x + 1)^2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ dom. (y) $= (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. Simetrías:

La función no presenta simetrías respecto de los ejes coordenados ni respecto al origen.

3. Periodicidad:

No es función periódica.

4. Continuidad:

La función es continua en toda la recta real, excepto para $x = -1$, punto en el que existe una discontinuidad de segunda especie.

5. Ramas parabólicas. Asíntotas:

La recta $y = 0$ (eje Ox) es asíntota horizontal, tanto a la izquierda como a la derecha, ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0.$$

La recta $x = -1$ es asíntota vertical, tanto a izquierda como a derecha, porque

$$\lim_{x \to -1^-} y(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} y(x) = -\infty.$$

6. Puntos de corte:

Con el eje Ox: $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ punto (0, 0).

Con el eje Oy: para $x = 0$, resulta $y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ punto (0, 0).

7. Intervalos de crecimiento. Extremos relativos:

$$y' = \frac{2(x+1)^2 - 2(x+1)(2x)}{(x+1)^4} = \frac{2(1-x)}{(x+1)^3};$$

$$y' = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1.$$

Son puntos críticos de y, los de abscisas 1 (punto cero de y') y -1 (discontinuidad de y').

Se estudia el signo de y' en los intervalos determinados por los puntos críticos.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	$-$	$+$	$-$

La función es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

El punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ es máximo relativo.

8. Intervalos de concavidad. Puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{-2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 \cdot 2(1-x)}{(x+1)^6};$$

$$y'' = \frac{-2(x+1) - 6(1-x)}{(x+1)^4} = \frac{4(x-2)}{(x+1)^4};$$

$$y'' = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2.$$

Son puntos críticos de y, de segunda especie, los de abscisas 2 (punto cero de y") y -1 (discontinuidad de y").

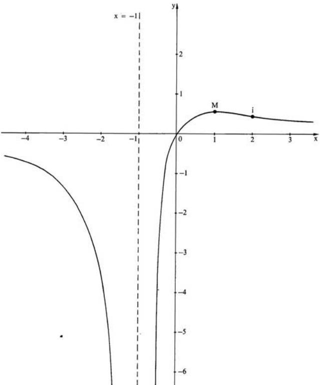
Se estudia el signo de y" en los intervalos determinados por los puntos críticos de segunda especie.

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
y"	$-$	$-$	$+$

La función es convexa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(-1, 2)$ y cóncava en el intervalo $(2, +\infty)$.

El punto $\left(2, \frac{4}{9}\right)$ es punto de inflexión.

La representación gráfica aparece en la figura siguiente.



TEMA III-4.1. — Integral indefinida I

Ejercicios resueltos

1. *Resolver la integral indefinida* $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

Como $u = \ln x \to u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \int (\ln x)^3 \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + K.$

2. *Calcular* $I = \int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx.$

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Como $\operatorname{sen} x - \cos x = -\cos x + \operatorname{sen} x = -(\cos x - \operatorname{sen} x)$:

$I = \int \frac{-(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx = -\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx = -\ln|\operatorname{sen} x + \cos x| + K$, ya que $D(\operatorname{sen} x + \cos x) = \cos x - \operatorname{sen} x$.

3. *Hallar* $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{D(\cos x)}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + K.$$

4. *Determinar* $S = \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ y $C = \int \cos^2 x\,dx$.

Como $\begin{cases} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x \end{cases}$ sumando y restando se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot\cos^2 x = 1 + \cos 2x \to \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \\ 2\cdot\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \to \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \end{aligned}\right\} \text{ sustituyendo en S y C:}$$

$$S = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + K.$$

Es decir: $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + K.$

$$C = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + K.$$

Es decir: $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + K.$

5. *Hallar* $I = \int \frac{\cos x}{1 - \cos x}\,dx.$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Multiplicando el numerador y el denominador por $1 + \cos x$:

$$\int \frac{\cos x\,(1 + \cos x)\,dx}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \int \frac{\cos x + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx;$$

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{sen}^{-2} x \cdot \cos x \, dx + \int \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx;$$

$$I = \int (\operatorname{sen} x)^{-2} \cos x \, dx + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} - \int dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^{-2+1}}{-2+1} - \operatorname{cotg} x - x + K.$$

Es decir: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 - \cos x} dx = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{cotg} x - x + K.$

6. *Hallar* $\displaystyle I = \int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} dx.$

(Propuesto en la Univ. de Oviedo.)

De la relación fundamental trigonométrica $1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$, se tiene:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} dx = \int \frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{2 \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} \right) dx;$$

$$I = 2 \cdot \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = 2 \cdot (-1) \ln |\cos x| + \ln |\operatorname{sen} x| + K = \ln \left| \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \right| + K.$$

Solución de los ejercicios propuestos

Hallar las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{3x^4}.$

$$I = \int \frac{2\,dx}{3x^4} = \frac{2}{3} \int x^{-4} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{(-3)} x^{-3} + K = -\frac{2}{9x^3} + K.$$

2. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{x-5}}.$

$$I = \int \frac{5\,dx}{\sqrt{x-5}} = 5 \int (x-5)^{-1/2} dx = 5 \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + 1\right)} (x-5)^{-1/2+1} + K;$$

$$I = 10(x-5)^{1/2} + K = 10\sqrt{x-5} + K.$$

3. $\displaystyle\int \frac{7\,dx}{2 - 3x}.$

Haciendo $u = 2 - 3x \rightarrow du = -3\,dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{7\,dx}{2-3x} = -\frac{7}{3} \int \frac{-3\,dx}{2-3x} = -\frac{7}{3} \int \frac{du}{u} = -\frac{7}{3} \ln |u| + K = -\frac{7}{3} \ln |2 - 3x| + K.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^3}$.

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int (x-2)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}(x-2)^{-2} + K = -\frac{1}{2(x-2)^2} + K.$$

5. $\int (x^2 - 5)x\,dx$.

Haciendo $u = x^2 - 5 \rightarrow du = 2x\,dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int (x^2-5)x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2-5)\,(2x\,dx) = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}u^2 + K = \frac{1}{4}(x^2-5) + K.$$

6. $\int 5(1 - x^3)\,dx$.

$$I = \int 5(1-x^3)\,dx = 5\int dx - 5\int x^3\,dx = 5x - \frac{5}{4}x^4 + K.$$

7. $\displaystyle\int \frac{6x\,dx}{x^2+4}$.

Haciendo $u = x^2 + 4 \rightarrow du = 2x\,dx$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{6x\,dx}{x^2+4} = 3\int \frac{2x\,dx}{x^2+4} = 3\int \frac{du}{u};$$

$$I = 3\ln|u| + K = 3\ln|x^2+4| + K = 3\ln(x^2+4) + K.$$

8. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

Haciendo $u = e^x + 1 \rightarrow du = e^x\cdot dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + K = \ln|e^x+1| + K = \ln(e^x+1) + K.$$

9. $\displaystyle\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}\,dx$.

Haciendo $u = 3x^2 - 6x + 5 \rightarrow du = (6x-6)\,dx = 6(x-1)\,dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6(x-1)\,dx}{3x^2-6x+5} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6}\ln|u| + K;$$

$$I = \frac{1}{6}\ln|3x^2-6x+5| + K.$$

10. $\int 3\cdot 2^x\,dx$.

$$I = \int 3\cdot 2^x\,dx = 3\int 2^x\,dx = 3\frac{1}{\ln 2}2^x + K = \frac{3}{\ln 2}2^x + K.$$

11. $\int 5 \cdot 3^{1-x}\, dx.$

Haciendo $u = 1 - x \rightarrow du = -dx$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int 5 \cdot 3^{1-x}\, dx = -5 \int 3^{1-x}\,(-dx) = -5 \int 3^u\, du = -5 \cdot \frac{1}{\ln 3}\, 3^u + K = -\frac{5}{\ln 3}\, 3^{1-x} + K.$$

12. $\int 2 \cdot e^{x^2}\, x\, dx.$

Haciendo $u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int 2 \cdot e^{x^2}\, x\, dx = \int e^u\, du = e^u + K = e^{x^2} + K.$$

13. $\int 2 \cdot e^{-x}\, dx.$

Haciendo $u = -x \rightarrow du = -dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int 2 \cdot e^{-x}\, dx = -\int e^{-x}\,(-dx) = -2 \int e^u\, du = -2\, e^u + K = -2\, e^{-x} + K.$$

14. $\int 3 \cdot \operatorname{sen} 3x\, dx.$

Haciendo $u = 3x \rightarrow du = 3\, dx$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int 3 \cdot \operatorname{sen} 3x\, dx = \int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + K = -\cos 3x + K.$$

15. $\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx.$

Como $\operatorname{sen}^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2}$, la integral se puede escribir:

$$I = \int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8} \int \cos 4x\, (4\, dx);$$

haciendo $u = 4x \rightarrow du = 4dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8} \int \cos u\, du = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8} \operatorname{sen} u + K = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x + K.$$

16. $\int \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x\, dx.$

Haciendo $u = \operatorname{sen} 2x \rightarrow du = 2 \cos 2x\, dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x\, (2 \cos 2x\, dx) = \frac{1}{2} \int u\, du = \frac{1}{4}\, u^2 + K = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 2x + K.$$

17. $\int \operatorname{cotg} x\, dx.$

Como $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, la integral se puede escribir: $I = \displaystyle\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx;$

haciendo $u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x\, dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + K = \ln |\operatorname{sen} x| + K.$$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

Haciendo $u = 2x \rightarrow du = 2\,dx$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\cos^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} u + K = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + K.$$

19. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{\operatorname{sen}^2 3x}$.

Haciendo $u = 3x \rightarrow du = 3\,dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{3\,dx}{\operatorname{sen}^2 3x} = \int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u} = -\operatorname{cotg} u + K = -\operatorname{cotg} 3x + K.$$

20. $\int (2 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx$.

Como $2 + \operatorname{tg}^2 x = 2 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = 1 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$, la integral se puede escribir:

$$I = \int (2 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = x + \operatorname{tg} x + K.$$

21. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

$$I = \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + K.$$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x}$.

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x + K.$$

23. $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$.

Como $\operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1$, la integral se puede escribir:

$$I = \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} - \int dx = -\operatorname{cotg} x - x + K.$$

24. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{1 + x^2}$.

$$I = \int \frac{3\,dx}{1 + x^2} = 3\int \frac{dx}{1 + x^2} = 3 \operatorname{arc\,tg} x + K.$$

25. $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{1 + x^4}$.

Haciendo $u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{2x\,dx}{1 + x^4} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + K = \operatorname{arc\,tg} x^2 + K.$$

26. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}}$.

Haciendo $u = e^x \rightarrow du = e^x\,dx$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{e^x\,dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + K = \operatorname{arc\,tg} e^x + K.$$

27. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$.

Haciendo $u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x\,dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{\cos x\,dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arc\,tg} u + K = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sen} x + K.$$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

Haciendo $u = 2x \rightarrow du = 2\,dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} u + K = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} 2x + K.$$

29. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

Haciendo $u = e^x \rightarrow du = e^x\,dx$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u + K = \operatorname{arc\,sen} e^x + K.$$

30. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{1 + 2x^2}$.

Haciendo $u = 1 + 2x^2 \rightarrow du = 4x\,dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{3x\,dx}{1 + 2x^2} = \frac{3}{4} \int \frac{4x\,dx}{1 + 2x^2} = \frac{3}{4} \int \frac{du}{u} = \frac{3}{4} \ln |u| + K;$$

$$I = \frac{3}{4} \ln |1 + 2x^2| + K = \frac{3}{4} \ln (1 + 2x^2) + K.$$

31. $\int \frac{3\,dx}{1 + 2x^2}$.

Haciendo $u = \sqrt{2}\,x \rightarrow du = \sqrt{2}\,dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{3\,dx}{1 + 2x^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}\,dx}{1 + (\sqrt{2}\,x)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1 + u^2};$$

$$I = \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg} u + K = \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{2}\,x + K.$$

32. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$I = \int \frac{5\,dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = 5 \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) + K.$$

33. $\int \frac{7\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$$I = \int \frac{7\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = 7 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = 7 \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) + K, \text{ (para } |x| > 1).$$

34. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

Haciendo $u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} u + K = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x^2 + K.$$

35. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^6}}$.

Haciendo $u = x^3 \rightarrow du = 3x^2\,dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^6}} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1 - (x^3)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}};$$

$$I = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} u + K = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} x^3 + K.$$

36. $\displaystyle\int \frac{\ln (x-1)^3}{2x-2}\,dx.$

$$I = \int \frac{\ln (x-1)^3}{2x-2}\,dx = \int \frac{3 \ln (x-1)}{2(x-1)}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{\ln (x-1)}{x-1}\,dx.$$

Haciendo $u = \ln (x-1) \rightarrow du = \dfrac{dx}{x-1}$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \frac{3}{2}\int u\,du = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}u^2 + K = \frac{3}{4}\ln^2 |x-1| + K.$$

TEMA III-4.2. ———— Integral indefinida II

Ejercicios resueltos

1. *Hallar* $I = \int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$.

(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)

Integrando por partes: $\begin{cases} u = \operatorname{sen}(\ln x) \to du = \cos(\ln x)\dfrac{1}{x}\,dx; \\ dv = dx \to v = \int dx = x. \end{cases}$

$$I = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int x \frac{1}{x} \cos(\ln x)\,dx = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Integrando de nuevo por partes: $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \to du = -\operatorname{sen}(\ln x)\dfrac{1}{x}\,dx; \\ dv = dx \to v = \int dx = x. \end{cases}$

$$I = x \operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int x \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = x \operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - I;$$

$$I + I = 2I = x[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] \to I = \frac{x}{2}[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)] + K.$$

2. *Calcular* $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Cambio: $\sqrt{x^2-2} = x + t$. Elevando al cuadrado: $x^2 - 2 = x^2 + 2xt + t^2 \to -2 = 2xt + t^2$.

Diferenciando los dos miembros:

$$0 = 2t\,dx + 2x\,dt + 2t\,dt \to 0 = t\,dx + (x+t)dt \to dx = -\frac{x+t}{t}dt.$$

Sustituyendo en I se obtiene:

$$I = \int \frac{-\dfrac{x+t}{t}\,dt}{x+t} = -\int \frac{(x+t)\,dt}{(x+t)t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + K.$$

De $\sqrt{x^2-2} = x + t \to t = \sqrt{x^2-2} - x \to I = -\ln\left|\sqrt{x^2-2} - x\right| + K$.

3. *Determinar la primitiva de* $I = \int \ln x\,dx$, *que pase por el punto* (e, 1).

En primer lugar se halla la integral indefinida.

Integrando por partes: $\begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}\,dx; \\ dv = dx \to v = x. \end{cases}$

$$I = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln|x| - x + K.$$

Dado que la integral indefinida es el conjunto de primitivas, de parámetro K, la primitiva que pase por el punto (e, 1) la verificará; por tanto:

$x = e, y = 1 \to 1 = e\ln e - e + K \to 1 = e - e + K \to K = 1.$

La primitiva es $y = x(\ln|x| - 1) + 1$.

Solución de los ejercicios propuestos

1. Hallar por el método de integración por partes:

a) $\int x\, e^x\, dx$.
(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

b) $\int x \ln x\, dx$.
(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

c) $\int x \ln (1 + x)\, dx$.
(Propuesto en la Univ. de Granada.)

d) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.
(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

e) $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

f) $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$.
(Propuesto en la Univ. de Murcia.)

g) $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx$.
(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

h) $\int x[\ln (1 + x^2) + e^{-x}]\, dx$.
(Propuesto en la Univ. de Granada.)

a) Integrando por partes, haciendo $\left\{\begin{array}{l} u = x \ \rightarrow \ du = dx, \\ dv = e^x\, dx \ \rightarrow \ v = e^x, \end{array}\right.$ resulta:

$$I = \int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + K = e^x(x - 1) + K.$$

b) Integrando por partes, haciendo $\left\{\begin{array}{l} u = \ln x \ \rightarrow \ du = \dfrac{1}{x}\, d\, x, \\ dv = x\, dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{1}{2}\, x^2, \end{array}\right.$ se obtiene:

$$I = \int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x\, dx;$$

$$I = \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \frac{1}{4}\, x^2 + K = \frac{1}{2}\, x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + K.$$

c) Integrando por partes, haciendo $\left\{\begin{array}{l} u = \ln (1 + x) \ \rightarrow \ du = \dfrac{1}{1 + x}\, dx, \\ dv = x\, dx \ \rightarrow \ v = \dfrac{1}{2}\, x^2, \end{array}\right.$ se deduce:

$$I = \int x \ln (1 + x)\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \ln (1 + x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1 + x}\, dx;$$

$$I = \frac{1}{2}\, x^2 \ln (1 + x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1 + x} \right) dx;$$

$$I = \frac{1}{2}\, x^2 \ln (1 + x) - \frac{1}{2} \left[\int x\, dx - \int dx + \int \frac{1}{1 + x}\, dx \right];$$

$$I = \frac{1}{2}\, x^2 \ln (1 + x) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\, x^2 - x + \ln (1 + x) \right] + K;$$

$$I = \frac{1}{2}\left[x^2 \ln(1+x) - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(1+x)\right] + K.$$

d) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx, \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \ \to \ v = -\cos x, \end{cases}$ resulta:

$$I = \int x \operatorname{sen} x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + K.$$

e) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \ \to \ du = \cos x\, dx, \\ dv = e^x\, dx \ \to \ v = e^x, \end{cases}$ se obtiene:

$$I = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Integrando de nuevo por partes, haciendo $\begin{cases} u = \cos x \ \to \ du = -\operatorname{sen} x\, dx, \\ dv = e^x\, dx \ \to \ v = e^x, \end{cases}$ resulta:

$$I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) - I.$$

Es decir, $2I = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) \ \to \ I = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + K.$

f) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = x^2 \ \to \ du = 2x\, dx, \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \ \to \ v = -\cos x, \end{cases}$ se deduce:

$$I = \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos x\, dx.$$

Integrando por partes de nuevo, haciendo $\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx, \\ dv = \cos x\, dx \ \to \ v = \operatorname{sen} x, \end{cases}$ se obtiene:

$$I = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen} x\, dx = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + K.$$

g) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = x^2 \ \to \ du = 2x\, dx, \\ dv = \operatorname{sen} 3x\, dx \ \to \ v = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3x\,(3\, dx) = -\frac{1}{3}\cos 3x, \end{cases}$

resulta:

$$I = \int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\, dx.$$

Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx, \\ dv = \cos 3x\, dx \ \to \ v = \frac{1}{3}\int \cos 3x\,(3\, dx) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x, \end{cases}$

se obtiene:

$$I = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3x\, dx\right);$$

$$I = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\operatorname{sen} 3x - \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3x\,(3\, dx);$$

$$I = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\operatorname{sen} 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + K.$$

h) $I = \int x[\ln(1+x^2) + e^{-x}]\, dx = \int x\ln(1+x^2)\, dx + \int x e^{-x}\, dx = I_1 + I_2.$

Integrando I_1, por partes, haciendo $\begin{cases} u = \ln(1+x^2) \ \to \ du = \frac{2x}{1+x^2}\, dx, \\ dv = x\, dx \ \to \ v = \frac{1}{2}x^2, \end{cases}$ se deduce:

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 \ln(1 + x^2) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(1 + x^2) - \int \frac{x^3}{1 + x^2}\,dx.$$

Como $\dfrac{x^3}{1 + x^2} = x - \dfrac{x}{1 + x^2}$, la integral I_1 se puede escribir:

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 \ln(1 + x^2) - \int x\,dx + \int \frac{x}{1 + x^2}\,dx;$$

$$I = \frac{1}{2}x^2 \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + K_1.$$

Integrando I_2 por partes, haciendo $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx, \\ dv = e^{-x}\,dx \rightarrow v = -e^{-x}, \end{cases}$ se obtiene:

$$I_2 = -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + K_2 = -e^{-x}(x + 1) + K_2.$$

Por tanto, $I = I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}x^2 \ln(1 + x^2) - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) - e^{-x}(x + 1) + K.$

2. Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}.$

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

b) $\displaystyle\int \frac{6x + 8}{x^2 + 2x + 5}\,dx.$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

c) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx.$

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

d) $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^3 + x}\,dx.$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + x^2}.$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$

a) Se trata de la integral de una función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador; se descompone el denominador en factores: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{(A + B)x + (-A + B)}{x^2 - 1};$$

como las fracciones primera y última son iguales, se identifican los coeficientes de los términos que tienen el mismo grado en los numeradores:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B = 1 \end{cases} \rightarrow A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2};$$

es decir, $I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$;

$$I = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + K = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K.$$

b) Se trata de la integral de una función racional en la que el numerador tiene menor grado que el denominador;

se hallan las raíces de la ecuación asociada al polinomio del denominador:

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -1 + 2i, x_2 = -1 - 2i;$$

como son dos raíces complejas conjugadas, $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 2^2$; es decir,

$$I = \int \frac{6x + 8}{x^2 + 2x + 5}dx = \int \frac{6x + 8}{(x+1)^2 + 4}dx = \int \frac{6x + 6 + 2}{(x+1)^2 + 4}dx = \int \frac{6(x+1) + 2}{(x+1)^2 + 4}dx;$$

$$I = \int \frac{6(x+1)}{(x+1)^2 + 4}dx + 2\int \frac{1}{(x+1)^2 + 4}dx = I_1 + 2I_2;$$

haciendo $t = (x+1)^2 + 4 \rightarrow dt = 2(x+1)\,dx$ y sustituyendo en I_1, se obtiene:

$$I_1 = \int \frac{3}{t}dt = 3\ln|t| + K_1 = 3\ln|(x+1)^2 + 4| + K_1;$$

haciendo $u = \frac{x+1}{2} \rightarrow du = \frac{dx}{2}$ y sustituyendo en I_2, resulta:

$$I_2 = \int \frac{2}{(2u)^2 + 4}du = \int \frac{2}{4(u^2 + 1)}du = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u + K_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + K_2;$$

por tanto, $I = I_1 + 2I_2 = 3\ln|(x+1)^2 + 4| + \operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2} + K$.

Nota: Sustituyendo los valores particulares de este ejercicio, $M = 6$, $N = 8$, $a = -1$ y $b = 2$, en la fórmula general (véase el libro de teoría),

$$\int \frac{Mx + N}{(x-a)^2 + b^2}dx = \frac{M}{2}\ln|(x-a)^2 + b^2| + \frac{Ma + N}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{b} + K,$$

correspondiente al caso en que el denominador tiene dos raíces complejas conjugadas, se comprueba que se obtiene el resultado anterior.

c) Se trata de la integral de una función racional en la que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador;

se efectúa, por tanto, la división:

$$\begin{array}{rl|l} x^4 & -3x^2 - 3x - 2 & x^3 - x^2 - 2x \\ \cline{3-3} -x^4 + x^3 + 2x^2 & & x + 1 \\ \hline x^3 - x^2 - 3x - 2 & & \\ -x^3 + x^2 + 2x & & \\ \hline -x - 2 & & \end{array}$$

es decir, $I = \int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx = \int \left[(x + 1) - \frac{x + 2}{x^3 - x^2 - 2x} \right] dx;$

$$I = \int (x + 1)\, dx - \int \frac{x + 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx = \frac{x^2}{2} + x - I_1;$$

I_1 es la integral de una función racional en la que el numerador tiene menor grado que el denominador;

se descompone el denominador en factores: $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2);$

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{x + 2}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 1)}{x(x + 1)(x - 2)};$$

como $A(x + 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 1) = x + 2$, para calcular A, B y C se hace:

$$x = 0 \rightarrow -2A = 2 \rightarrow A = -1; \quad x = -1 \rightarrow 3B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{3};$$

$$x = 2 \rightarrow 6C = 4 \rightarrow C = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

es decir, $I_1 = \int \frac{x + 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x + 1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x - 2};$

$$I_1 = -\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x + 1| + \frac{2}{3}\ln|x - 2| + K_1;$$

por tanto, $I = \frac{x^2}{2} + x - I_1 = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{2}{3}\ln|x - 2| + K.$

d) Se trata de la integral de una función racional en la que el numerador tiene menor grado que el denominador;

se descompone el denominador en factores: $x^3 + x = x(x^2 + 1);$

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{x - 2}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Mx + N)x}{x(x^2 + 1)} = \frac{(A + M)x^2 + Nx + A}{x^3 + x};$$

como son iguales las fracciones primera y última, se identifican los coeficientes de los términos del mismo grado de los numeradores:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + M = 0 \\ N = 1 \\ A = -2 \end{array} \right. \rightarrow A = -2,\ M = 2,\ N = 1;$$

es decir,

$$I = \int \frac{x - 2}{x^3 + x}\, dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1} \right) dx = -2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x\, dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{1 + x^2};$$

$$I = -2\ln|x| + \ln|x^2 + 1| + \operatorname{arc\,tg} x + K.$$

e) Se trata de la integral de una función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador;

se descompone el denominador en factores: $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1);$

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} = \frac{Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Mx + N)x^2}{x^2(x^2 + 1)};$$

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{(A + M)x^3 + (B + N)x^2 + Ax + B}{x^4 + x^2};$$

como las fracciones son iguales, se identifican los coeficientes de los términos del mismo grado de los numeradores:

$$\begin{cases} A + M = 0 \\ B + N = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \rightarrow A = 0, B = 1, M = 0, N = -1;$$

es decir, $I = \int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx;$

$$I = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} - \text{arc tg } x + K.$$

f) Se trata de la integral de una función racional en la que el numerador tiene menor grado que el denominador;

se descompone el denominador en factores:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1);$$

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Mx + N)(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)};$$

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{(A + B + M)x^3 + (A - B + N)x^2 + (A + B - M)x + (A - B - N)}{x^4 - 1};$$

como son iguales las fracciones, se identifican los coeficientes de los términos que tienen el mismo grado en los numeradores:

$$\begin{cases} A + B + M = 0 \\ A - B + N = 0 \\ A + B - M = 0 \\ A - B - N = 1 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, M = 0, N = -\frac{1}{2};$$

es decir, $I = \int \frac{dx}{x^4 - 1} = \int \left(\frac{1}{4(x - 1)} - \frac{1}{4(x + 1)} - \frac{1}{2(x^2 + 1)} \right) dx;$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x^2};$$

$$I = \frac{1}{4} \ln |x - 1| - \frac{1}{4} \ln |x + 1| - \frac{1}{2} \text{arc tg } x + K.$$

3. Hallar las siguientes integrales por el método de cambio de variable:

a) $\int \text{sen}^2 3x \cos 3x \, dx$.

(Propuesto en la Univ. de Valencia.)

b) $\int \sqrt{1 - 4x^2} \, dx$.

$\left(\text{Cambio: } x = \dfrac{1}{2} \text{sen } t. \right)$

c) $\int \sqrt{1 - ax^2} \, dx$, para $a > 0$.

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$.

(Cambio: $x = at$.)

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 9}$.

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 + 4}$.

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 + 3}$.

h) $\int \text{sen}^2 2x \, dx$.

i) $\displaystyle\int \frac{2 \, dx}{3 \text{ sen } x}$.

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$.

k) $\displaystyle\int \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} \, dx$.

l) $\int \sec^3 x \, dx$.

(Cambio: $\text{sen } x = t$.)

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

m) $\int \text{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,[(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2]}$.

(Cambio: $\ln x = t$.)

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

o) $\int \sqrt{x^2 - 4} \, dx$.

p) $\int \sqrt{x^2 + 5} \, dx$.

a) Haciendo $u = \text{sen } 3x \rightarrow du = 3 \cos 3x \, dx$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \text{sen}^2 3x \cos 3x \, dx = \int u^2 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^2 \, du = \frac{u^3}{9} + K = \frac{\text{sen}^3 3x}{9} + K.$$

b) Haciendo $x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t \rightarrow dx = \frac{1}{2}\cos t\,dt$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx = \int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t}\,\frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int \cos t \cos t\,dt = \frac{1}{2}\int \cos^2 t\,dt;$$

como $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, la integral se puede escribir:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{4}\int \cos 2t\,dt = \frac{t}{4} + \frac{\text{sen}\,2t}{8} + K;$$

como $\text{sen}\,2t = 2\,\text{sen}\,t\cos t = 2\,\text{sen}\,t\sqrt{1 - \text{sen}^2 t} = 4x\sqrt{1 - 4x^2}$ y $t = \text{arc sen}\,2x$, se tiene:

$$I = \frac{\text{arc sen}\,2x}{4} + \frac{4x\sqrt{1 - 4x^2}}{8} + K = \frac{\text{arc sen}\,2x}{4} + \frac{x\sqrt{1 - 4x^2}}{2} + K.$$

c) Haciendo $x = \frac{\text{sen}\,t}{\sqrt{a}} \rightarrow dx = \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{a}}$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \sqrt{1 - ax^2}\,dx = \int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t}\,\frac{\cos t\,dt}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \cos t \cos t\,dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \cos^2 t\,dt;$$

como $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, la integral se transforma en:

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int dt + \frac{1}{2\sqrt{a}}\int \cos 2t\,dt = \frac{t}{2\sqrt{a}} + \frac{\text{sen}\,2t}{4\sqrt{a}} + K;$$

como $\text{sen}\,2t = 2\,\text{sen}\,t\cos t = 2\,\text{sen}\,t\sqrt{1 - \text{sen}^2 t} = 2\sqrt{a}\,x\sqrt{1 - ax^2}$ y $t = \text{arc sen}\,\sqrt{a}\,x$, se tiene:

$$I = \frac{\text{arc sen}\,\sqrt{a}\,x}{2\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{a}\,x\sqrt{1 - ax^2}}{4\sqrt{a}} + K = \frac{\text{arc sen}\,\sqrt{a}\,x}{2\sqrt{a}} + \frac{x\sqrt{1 - ax^2}}{2} + K.$$

d) Haciendo $x = at \rightarrow dx = a\,dt$, y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\,dt}{a^2t^2 + a^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,t + K = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a} + K.$$

e) Haciendo $x = 3t \rightarrow dx = 3\,dt$, y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \int \frac{3\,dt}{9t^2 + 9} = \frac{3}{9}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,t + K = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{3} + K.$$

f) $$\int \frac{dx}{4x^2 + 4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\,x + K.$$

g) Haciendo $x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt$, y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{dx}{4x^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{3t^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{arc tg}\,t + K = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{arc tg}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}x + K.$$

h) Haciendo $\text{tg}\,2x = t$ esta integral de una función trigonométrica se reduce a la integral de una función racional.

Así pues, $\text{tg}\,2x = t \rightarrow 2(1 + \text{tg}^2\,2x)\,dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{2(1 + \text{tg}^2\,2x)} = \frac{dt}{2(1 + t^2)}$;

$$\operatorname{tg}^2 2x = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \rightarrow \operatorname{tg}^2 2x\,(1 - \operatorname{sen}^2 2x) = \operatorname{sen}^2 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}^2 2x = \operatorname{sen}^2 2x\,(1 + \operatorname{tg}^2 2x) \rightarrow \operatorname{sen}^2 2x = \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{t^2}{1 + t^2};$$

sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \int \frac{t^2}{1 + t^2} \frac{dt}{2(1 + t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{t^2\, dt}{(1 + t^2)^2}.$$

La última integral es la de una función racional en la que el denominador tiene raíces complejas conjugadas dobles; la integral se calcula por el método de integración por partes.

$$\text{Como } \frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2(1 + t^2)}\right] = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1 + t^2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{-2t}{(1 + t^2)^2}\right] = \frac{t}{(1 + t^2)^2},$$

$$\text{haciendo } \begin{cases} u = t \rightarrow du = dt, \\ dv = \dfrac{t\, dt}{(1 + t^2)^2} \rightarrow v = -\dfrac{1}{2(1 + t^2)}, \end{cases} \text{ se obtiene:}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{t^2\, dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{1}{2} t \left[-\frac{1}{2(1 + t^2)}\right] - \frac{1}{2} \int -\frac{1}{2(1 + t^2)}\, dt;$$

$$I = -\frac{1}{4}\frac{t}{1 + t^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} t + K.$$

Deshaciendo el cambio $\operatorname{tg} 2x = t$, resulta:

$$I = -\frac{1}{4}\frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} + \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 2x) + K.$$

$$\text{Al ser } \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} = \operatorname{sen}^2 2x \rightarrow \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\operatorname{sen} 2x : \cos 2x} =$$

$= \operatorname{sen} 2x \cos 2x = \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{2}$ y $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 2x) = 2x$, se tiene:

$$I = -\frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen} 4x}{2} + \frac{1}{4} 2x + K = -\frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2} x + K.$$

Nota: Esta integral puede también calcularse más sencillamente, sin necesidad de realizar un cambio de variable, de estas dos formas:

1) Como $\operatorname{sen}^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2}$, la integral se transforma en:

$$I = \int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 4x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x + K.$$

2) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \operatorname{sen} 2x \rightarrow du = 2\cos 2x\, dx, \\ dv = \operatorname{sen} 2x\, dx \rightarrow v = -\dfrac{\cos 2x}{2}, \end{cases}$ se deduce:

$$I = \int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \operatorname{sen} 2x \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int -\frac{\cos 2x}{2}\, 2 \cos 2x\, dx;$$

$$I = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x\cos 2x + \int \cos^2 2x\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}\,4x}{2} + \int (1 - \text{sen}^2 2x)\,dx;$$

$$I = -\frac{1}{4}\,\text{sen}\,4x + \int dx - \int \text{sen}^2 2x\,dx = -\frac{1}{4}\,\text{sen}\,4x + x - I;$$

$$2\,I = -\frac{1}{4}\,\text{sen}\,4x + x + K' \rightarrow I = -\frac{1}{8}\,\text{sen}\,4x + \frac{1}{2}x + K.$$

i) Haciendo $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t \rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}\right)dx = dt \rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2dt}{1 + t^2};$

$$\text{sen}\,x = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \text{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \frac{2\,dx}{3\,\text{sen}\,x} = \frac{2}{3}\int \frac{1 + t^2}{2t}\,\frac{2\,dt}{1 + t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t};$$

$$I = \frac{2}{3}\ln|t| + K = \frac{2}{3}\ln\left|\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\,\right| + K.$$

j) Haciendo $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t \rightarrow \frac{1}{2}\left(1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}\right)dx = dt \rightarrow dx = \frac{2dt}{1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2dt}{1 + t^2};$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \text{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \text{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \text{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\,\frac{2\,dt}{1 + t^2} = \int \frac{2\,dt}{1 - t^2}.$$

Se trata de la integral de una función racional en la que el numerador tiene menor grado que el denominador;

se descompone el denominador en factores: $1 - t^2 = (1 + t)(1 - t)$;

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{2}{1 - t^2} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B}{1 - t} = \frac{A(1 - t) + B(1 + t)}{(1 + t)(1 - t)} = \frac{(-A + B)\,t + (A + B)}{1 - t^2};$$

como las fracciones primera y última son iguales, se identifican los coeficientes de los términos del mismo grado de los numeradores:

$$\begin{cases} -A + B = 0 \\ A + B = 2 \end{cases} \rightarrow A = 1,\ B = 1;$$

es decir, $I = \int \frac{2dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{1 + t} + \int \frac{dt}{1 - t} = \ln|1 + t| - \ln|1 - t| + K;$

$$I = \ln\left|\,\frac{1 + t}{1 - t}\,\right| + K.$$

Deshaciendo el cambio $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \rightarrow I = \ln\left|\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + K.$

k) Haciendo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$; $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$;

sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}\,dx = \int \frac{\dfrac{2t}{1 + t^2}}{1 - \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}}\,\frac{2\,dt}{1 + t^2} = \int \frac{\dfrac{2t}{1 + t^2}}{\dfrac{2t^2}{1 + t^2}}\,\frac{2\,dt}{1 + t^2} = \int \frac{2\,dt}{t(1 + t^2)}.$$

Se trata de la integral de una función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador;

la ecuación asociada al polinomio del denominador tiene una raíz simple ($t = 0$) y dos raíces imaginarias conjugadas ($t = i$, $t = -i$);

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{2}{t(1 + t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Mt + N}{1 + t^2} = \frac{A(1 + t^2) + (Mt + N)t}{t(1 + t^2)} = \frac{(A + M)t^2 + Nt + A}{t(1 + t^2)};$$

como son iguales las fracciones primera y última, se identifican los coeficientes de los términos que tienen el mismo grado en los numeradores:

$$\begin{cases} A + M = 0 \\ N = 0 \\ A = 2 \end{cases} \rightarrow A = 2,\ M = -2,\ N = 0;$$

es decir, $I = \int \frac{2\,dt}{t(1 + t^2)} = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{1 + t^2}\right) dt = 2\int \frac{dt}{t} - \int \frac{2t\,dt}{1 + t^2}$;

$$I = 2\ln|t| - \ln|1 + t^2| + K = \ln\left|\frac{t^2}{1 + t^2}\right| + K.$$

Deshaciendo el cambio $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, resulta:

$$I = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right| + K = \ln\left|\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} : \cos^2\frac{x}{2}}{1 : \cos^2\frac{x}{2}}\right| + K = \ln\left|\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right| + K;$$

$$I = 2\ln\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right| + K.$$

Nota: Esta integral también se puede calcular de la forma siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - \left(\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2};$$

es decir, $I = \int \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\text{sen } \frac{x}{2}} dx.$

Haciendo $\frac{x}{2} = t \rightarrow \frac{dx}{2} = dt \rightarrow dx = 2\,dt$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\text{sen } \frac{x}{2}} dx = 2 \int \frac{\cos t}{\text{sen } t} dt = 2 \ln |\text{sen } t| + K = 2 \ln \left| \text{sen } \frac{x}{2} \right| + K.$$

l) • Haciendo $\text{sen } x = t \rightarrow \cos x\, dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x} = \frac{dt}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}};$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}};$$

sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \sec^3 x\, dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{(\sqrt{1 - t^2})^3} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2}.$$

Se trata de la integral de una función racional en la que el numerador tiene menor grado que el denominador;

se descompone el denominador en factores: $(1 - t^2)^2 = (1 + t)^2 (1 - t)^2$;

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(1 - t^2)^2} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B}{(1 + t)^2} + \frac{C}{1 - t} + \frac{D}{(1 - t)^2};$$

$$\frac{1}{(1 - t^2)^2} = \frac{A(1 + t)(1 - t)^2 + B(1 - t)^2 + C(1 - t)(1 + t)^2 + D(1 + t)^2}{(1 + t)^2 (1 - t)^2};$$

$$\frac{1}{(1 - t^2)^2} = \frac{A(t^3 - t^2 - t + 1) + B(t^2 - 2t + 1) + C(-t^3 - t^2 + t + 1) + D(t^2 + 2t + 1)}{(1 - t^2)^2};$$

$$\frac{1}{(1 - t^2)^2} = \frac{(A - C)t^3 + (-A + B - C + D)t^2 + (-A - 2B + C + 2D)t + (A + B + C + D)}{(1 - t^2)^2};$$

como las fracciones son iguales, se identifican los coeficientes de los términos que tienen el mismo grado en los numeradores:

$$\left\{ \begin{array}{l} A - C = 0 \\ -A + B - C + D = 0 \\ -A - 2B + C + 2D = 0 \\ A + B + C + D = 1 \end{array} \right. \rightarrow A = B = C = D = \frac{1}{4};$$

es decir, $I = \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1 + t)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 - t} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1 - t)^2};$

$$I = \frac{1}{4} \ln |1 + t| - \frac{1}{4(1 + t)} - \frac{1}{4} \ln |1 - t| + \frac{1}{4(1 - t)} + K;$$

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t}\right) + K = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2} + K.$$

Deshaciendo el cambio sen x = t, se obtiene:

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x} + K = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + K.$$

m) Haciendo $u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx;$$

$$I = \int (1-u^2)\, u^4 (-du) = -\int u^4\, du + \int u^6\, du;$$

$$I = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + K = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + K.$$

n) Haciendo $\ln x = t \rightarrow \frac{dx}{x} = dt$ y sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \frac{dx}{x[(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - \ln x + 2]} = \int \frac{dt}{t^3 - 2t^2 - t + 2}.$$

Se trata de la integral de una función racional en la que el grado del numerador es menor que el grado del denominador;

se descompone el denominador en factores (por la regla de Ruffini):

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = (t+1)(t-1)(t-2);$$

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{t^3 - 2t^2 - t + 2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-2} =$$

$$= \frac{A(t-1)(t-2) + B(t+1)(t-2) + C(t+1)(t-1)}{(t+1)(t-1)(t-2)};$$

como $A(t-1)(t-2) + B(t+1)(t-2) + C(t+1)(t-1) = 1$, para hallar A, B y C se hace:

$$t = -1 \rightarrow 6A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{6}; \quad t = 1 \rightarrow -2B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{2};$$

$$t = 2 \rightarrow 3C = 1 \rightarrow C = \frac{1}{3};$$

es decir, $I = \int \frac{dt}{t^3 - 2t^2 - t + 2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-2};$

$$I = \frac{1}{6}\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\ln|t-2| + K.$$

Deshaciendo el cambio ln x = t, resulta:

$$I = \frac{1}{6}\ln|\ln x + 1| - \frac{1}{2}\ln|\ln x - 1| + \frac{1}{3}\ln|\ln x - 2| + K.$$

o) Haciendo $t = x + \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = -x + t$, resulta:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2xt + t^2 \rightarrow 2xt = t^2 + 4 \rightarrow x = \frac{t^2 + 4}{2t};$$

$$dx = \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2 + 4)}{4t^2}\, dt = \frac{4t^2 - 2t^2 - 8}{4t^2}\, dt = \frac{2t^2 - 8}{4t^2}\, dt = \frac{t^2 - 4}{2t^2}\, dt;$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = -x + t = -\frac{t^2 + 4}{2t} + t = \frac{-t^2 - 4 + 2t^2}{2t} = \frac{t^2 - 4}{2t};$$

es decir, $I = \int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = \int \frac{t^2 - 4}{2t} \frac{t^2 - 4}{2t^2}\, dt = \int \frac{t^4 - 8t^2 + 16}{4t^3}\, dt;$

$$I = \frac{1}{4} \int t\, dt - 2 \int \frac{dt}{t} + 4 \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^2}{8} - 2 \ln |t| - \frac{2}{t^2} + K = \frac{t^4 - 16}{8t^2} - 2 \ln |t| + K.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{t^4 - 16}{8t^2} = \frac{(t^2 + 4)(t^2 - 4)}{8t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^2 + 4}{2t}\right) \cdot \left(\frac{t^2 - 4}{2t}\right) =$
$= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4}$, deshaciendo el cambio de variable resulta:

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + K.$$

Nota: Esta integral también se puede calcular de las formas siguientes:

1) Haciendo $x = \frac{2}{\text{sen}\, u} \rightarrow dx = \frac{-2 \cos u}{\text{sen}^2 u}\, du;$

$$\text{sen}\, u = \frac{2}{x}; \quad \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\frac{4}{\text{sen}^2 u} - 4} = 2 \sqrt{\frac{1 - \text{sen}^2 u}{\text{sen}^2 u}} = \frac{2 \cos u}{\text{sen}\, u};$$

sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = -\int \frac{2 \cos u}{\text{sen}\, u} \frac{2 \cos u}{\text{sen}^2 u}\, du = -4 \int \frac{\cos^2 u}{\text{sen}^3 u}\, du.$$

Haciendo $\text{tg}\, \frac{u}{2} = t \rightarrow du = \frac{2\, dt}{1 + t^2}; \quad \text{sen}\, u = \frac{2\, t}{1 + t^2}; \quad \cos u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$

sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = -4 \int \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 \left(\frac{1 + t^2}{2t}\right)^3 \frac{2\, dt}{1 + t^2} = -\int \frac{(1 - t^2)^2}{t^3}\, dt = -\int \frac{1 - 2t^2 + t^4}{t^3}\, dt;$$

$$I = -\int \frac{dt}{t^3} + 2 \int \frac{dt}{t} - \int t\, dt = \frac{1}{2\, t^2} + 2 \ln |t| - \frac{t^2}{2} + K.$$

Deshaciendo el último cambio de variable $t = \text{tg}\, \frac{u}{2} = \frac{\text{sen}\, \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{\text{sen}\, u}{1 + \cos u}$, resulta:

$$I = \frac{\cos^2 \frac{u}{2}}{2\, \text{sen}^2 \frac{u}{2}} - \frac{\text{sen}^2 \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} + 2 \ln \left| \text{tg}\, \frac{u}{2} \right| + K;$$

$$I = \frac{\cos^4 \frac{u}{2} - \operatorname{sen}^4 \frac{u}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2}} + 2 \ln \left| \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u} \right| + K;$$

$$I = \frac{2\left(\cos^2 \frac{u}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}\right)\left(\cos^2 \frac{u}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}\right)}{\left(2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}\right)\left(2 \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}\right)} + 2 \ln \left| \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u} \right| + K;$$

$$I = \frac{2 \cos u}{\operatorname{sen}^2 u} - 2 \ln \left| \frac{1 + \cos u}{\operatorname{sen} u} \right| + K;$$

$$I = \frac{2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}}{\operatorname{sen}^2 u} - 2 \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}}{\operatorname{sen} u} \right| + K.$$

Sustituyendo en I $\operatorname{sen} u = \dfrac{2}{x}$, se obtiene:

$$I = \frac{2\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{\frac{4}{x^2}} - 2 \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{\frac{4}{x^2}} \right| + K = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{4} \right| + K;$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + (2 \ln 4 + K);$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + K'.$$

2) Multiplicando y dividiendo el integrando por $\sqrt{x^2 - 4}$, la integral se escribe:

$$I = \int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = \int \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - 4}} - 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = I_1 - 4\, I_2.$$

Integrando I_1 por partes, haciendo $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx, \\ dv = \dfrac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - 4}} \rightarrow v = \sqrt{x^2 - 4}, \end{cases}$ se deduce:

$$I_1 = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = x\sqrt{x^2 - 4} - \int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = x\sqrt{x^2 - 4} - I.$$

Integrando I_2, haciendo $t = x + \sqrt{x^2 - 4} \rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = -x + t$, resulta:

$$x = \frac{t^2 + 4}{2t}; \qquad dx = \frac{t^2 - 4}{2t^2}\, dt; \qquad \sqrt{x^2 - 4} = \frac{t^2 - 4}{2t};$$

es decir, $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{2t}{t^2 - 4} \frac{t^2 - 4}{2\, t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t};$

$$I_2 = \ln |t| + K_2 = \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + K_2.$$

Por tanto, $I = I_1 - 4I_2 = x\sqrt{x^2-4} - I - 4 \ln |x + \sqrt{x^2-4}|$;

$$2I = x\sqrt{x^2-4} - 4 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + K' \rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + K.$$

3) Integrando por partes, haciendo $\left\{\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2-4} \rightarrow du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}, \\ dv = dx \rightarrow v = x, \end{array}\right.$ se deduce:

$$I = x\sqrt{x^2-4} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}} = x\sqrt{x^2-4} - \int \frac{(x^2-4+4)\,dx}{\sqrt{x^2-4}};$$

$$I = x\sqrt{x^2-4} - \int \frac{(x^2-4)dx}{\sqrt{x^2-4}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = x\sqrt{x^2-4} - \int \sqrt{x^2-4}\,dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}};$$

$$I = x\sqrt{x^2-4} - I - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} \rightarrow 2I = x\sqrt{x^2-4} - 4I_1.$$

En este mismo ejercicio se ha calculado que $I_1 = \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + K_1$; por tanto:

$$2I = x\sqrt{x^2-4} - 4 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + K' \rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + K.$$

p) Haciendo $t = -x + \sqrt{x^2+5} \rightarrow \sqrt{x^2+5} = x + t$, se obtiene:

$$x^2 + 5 = x^2 + 2xt + t^2 \rightarrow 2xt = 5 - t^2 \rightarrow x = \frac{5-t^2}{2t};$$

$$dx = \frac{-2t \cdot 2t - 2(5-t^2)}{4t^2}\,dt = \frac{-4t^2 - 10 + 2t^2}{4t^2}\,dt = \frac{-2t^2-10}{4t^2}\,dt = \frac{-t^2-5}{2t^2}\,dt;$$

$$\sqrt{x^2+5} = x + t = \frac{5-t^2}{2t} + t = \frac{5-t^2+2t^2}{2t} = \frac{t^2+5}{2t};$$

es decir, $I = \int \sqrt{x^2+5}\,dx = -\int \frac{t^2+5}{2t}\left(\frac{-t^2-5}{2t^2}\right)dt = -\int \frac{t^4+10t^2+25}{4t^3}\,dt;$

$$I = -\frac{1}{4}\int t\,dt - \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{25}{4}\int \frac{dt}{t^3} = -\frac{t^2}{8} - \frac{5}{2}\ln|t| + \frac{25}{8t^2} + K;$$

$$I = \frac{25-t^4}{8t^2} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{1}{t}\right| + K.$$

Teniendo en cuenta que $\dfrac{25-t^4}{8t^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{5-t^2}{2t}\right)\cdot\left(\dfrac{5+t^2}{2t}\right) = \dfrac{1}{2}\,x\sqrt{x^2+5}$, deshaciendo el cambio de variable resulta:

$$I = \frac{x}{x}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+5}}\right| + K = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{-5}\right| + K;$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + (-\ln|5| + K);$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K'.$$

Nota: Esta integral puede también calcularse de las siguientes formas:

1) Haciendo $x = \sqrt{5}\,\text{tg}\,u \rightarrow dx = \dfrac{\sqrt{5}\,du}{\cos^2 u}$;

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5\,\text{tg}^2 u + 5} = \sqrt{5}\sqrt{\text{tg}^2 u + 1} = \frac{\sqrt{5}}{\cos u};$$

sustituyendo en I, resulta:

$$I = \int \sqrt{x^2+5}\,dx = \int \frac{\sqrt{5}}{\cos u}\,\frac{\sqrt{5}\,du}{\cos^2 u} = 5\int \frac{du}{\cos^3 u} = 5\,I_1.$$

La integral I_1 se ha calculado en el ejercicio *l)*, obteniéndose:

$$I_1 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\text{sen}\,u}{1-\text{sen}\,u}\right| + \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}\,u}{\cos^2 u} + K_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{1+\text{sen}\,u}{1-\text{sen}\,u}}\right| + \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}\,u}{\cos^2 u} + K_1.$$

Operando para expresar I_1 en función de tg u, se tiene:

$$\sqrt{\frac{1+\text{sen}\,u}{1-\text{sen}\,u}} = \sqrt{\frac{(1+\text{sen}\,u)(1+\text{sen}\,u)}{(1-\text{sen}\,u)(1+\text{sen}\,u)}} =$$

$$= \frac{1+\text{sen}\,u}{\cos u} = \frac{1}{\cos u} + \text{tg}\,u = \sqrt{1+\text{tg}^2 u} + \text{tg}\,u;$$

$$\frac{\text{sen}\,u}{\cos^2 u} = \frac{\text{sen}\,u}{\cos u}\,\frac{1}{\cos u} = \text{tg}\,u\sqrt{1+\text{tg}^2 u};$$

por tanto, $I_1 = \dfrac{1}{2}\ln\left|\text{tg}\,u + \sqrt{1+\text{tg}^2 u}\right| + \dfrac{1}{2}\,\text{tg}\,u\sqrt{1+\text{tg}^2 u} + K_1$.

Deshaciendo el cambio $\text{tg}\,u = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$, se deduce:

$$I = 5\,I_1 = \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{5}} + \sqrt{1+\frac{x^2}{5}}\right| + \frac{5}{2}\,\frac{x}{\sqrt{5}}\sqrt{1+\frac{x^2}{5}} + K';$$

$$I = \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}}\right| + \frac{5x}{2\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}} + K';$$

$$I = \frac{5}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| - \ln\sqrt{5}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + K';$$

siendo $\dfrac{5}{2}\ln\sqrt{5}$ una constante que se resta a K', se tiene:

$$I = \frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + K.$$

2) Multiplicando y dividiendo el integrando por $\sqrt{x^2+5}$, la integral se escribe:

$$I = \int\sqrt{x^2+5}\,dx = \int\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+5}}\,dx = \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+5}} + 5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = I_1 + 5\,I_2.$$

Integrando I_1 por partes, haciendo $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx, \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}} \rightarrow v = \sqrt{x^2+5}, \end{cases}$ se obtiene:

$$I_1 = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}\,dx = x\sqrt{x^2+5} - I.$$

Integrando I_2, haciendo $t = -x + \sqrt{x^2+5} \rightarrow \sqrt{x^2+5} = x + t$ y operando como antes, resulta:

$$x = \frac{5-t^2}{2t}; \quad dx = \frac{-t^2-5}{2t^2}\,dt; \quad \sqrt{x^2+5} = \frac{t^2+5}{2t};$$

es decir, $I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = -\int \frac{2t}{t^2+5}\,\frac{t^2+5}{2t^2}\,dt = -\int \frac{dt}{t};$

$$I_2 = -\ln|t| + K_2' = \ln\left|\frac{1}{t}\right| + K_2';$$

$$I_2 = \ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2+5}}\right| + K_2' = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{(-x+\sqrt{x^2+5})(x+\sqrt{x^2+5})}\right| + K_2';$$

$$I_2 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{(x^2+5)-x^2}\right| + K_2';$$

$$I_2 = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{5} + K_2' = \ln|x+\sqrt{x^2+5}| - \ln 5 + K_2';$$

siendo $\ln 5$ una constante que se resta a K_2', se tiene:

$$I_2 = \ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K_2.$$

Por tanto, $I = I_1 + 5I_2 = x\sqrt{x^2+5} - I + 5\ln|x+\sqrt{x^2+5}|;$

$$2I = x\sqrt{x^2+5} + 5\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K' \rightarrow$$

$$\rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K.$$

3) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+5} \rightarrow du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}, \\ dv = dx \rightarrow v = x, \end{cases}$ se deduce:

$$I = x\sqrt{x^2+5} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = x\sqrt{x^2+5} - \int \frac{(x^2+5-5)\,dx}{\sqrt{x^2+5}};$$

$$I = x\sqrt{x^2+5} - \int \frac{(x^2+5)dx}{\sqrt{x^2+5}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}\,dx + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}};$$

$$I = x\sqrt{x^2+5} - I + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} \rightarrow 2I = x\sqrt{x^2+5} + 5I_1.$$

En este mismo ejercicio se ha calculado que $I_1 = \ln|x + \sqrt{x^2+5}| + K_1$; por tanto:

$$2I = x\sqrt{x^2+5} + 5\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K' \rightarrow$$

$$\rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K.$$

3) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \sqrt{x^2+5} \rightarrow du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}, \\ dv = dx \rightarrow v = x, \end{cases}$ se deduce:

$$I = x\sqrt{x^2+5} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = x\sqrt{x^2+5} - \int \frac{(x^2+5-5)\,dx}{\sqrt{x^2+5}};$$

$$I = \sqrt{x^2+5} - \int \frac{(x^2+5)dx}{\sqrt{x^2+5}} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}\,dx + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}};$$

$$I = x\sqrt{x^2+5} - I + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} \rightarrow 2I = x\sqrt{x^2+5} + 5I_1.$$

En este mismo ejercicio se ha calculado que $I_1 = \ln|x + \sqrt{x^2+5}| + K_1$; por tanto:

$$2I = x\sqrt{x^2+5} + 5\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K' \rightarrow$$

$$\rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+5}| + K.$$

4. Calcular $f(x)$ de manera que $f'(x) = \ln(4x^2-1)$ y $f(0) = 0$.
(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

La función $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$. Se calcula la integral indefinida de $f'(x)$, que representa todas sus primitivas en función de una constante K, y se determina la constante para que $f(0) = 0$.

$$I = \int f'(x)\,dx = \int \ln(4x^2-1)\,dx.$$

Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \ln(4x^2-1) \rightarrow du = \dfrac{8x}{4x^2-1}, \\ dv = dx \rightarrow v = x, \end{cases}$ resulta:

$$I = \int \ln(4x^2-1)\,dx = x\ln|4x^2-1| - \int \frac{8x^2}{4x^2-1}\,dx;$$

$$I = x\ln|4x^2-1| - \int \frac{(8x^2-2+2)}{4x^2-1}\,dx = x\ln|4x^2-1| - \int\left(2 + \frac{2}{4x^2-1}\right)dx;$$

$$I = x\ln|4x^2-1| - \int 2\,dx - \int \frac{2\,dx}{4x^2-1} = x\ln|4x^2-1| - 2x - I_1.$$

La integral I_1 es la integral de una función racional en la que el numerador tiene menor grado que el denominador;

se descompone el denominador en factores: $4x^2-1 = (2x-1)(2x+1)$;

se transforma la función en suma de fracciones simples:

$$\frac{2}{4x^2-1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1) + B(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2(A+B)x + (A-B)}{4x^2-1};$$

como las fracciones primera y última son iguales, se identifican los coeficientes de los términos del mismo grado de los numeradores:

$$\begin{cases} 2(A + B) = 0 \\ A - B = 2 \end{cases} \rightarrow A = 1, B = -1;$$

es decir, $I_1 = \int \frac{2\,dx}{4x^2 - 1} = \int \left(\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{2x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{2\,dx}{2x - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{2\,dx}{2x + 1}$;

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln |2x - 1| - \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + K_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x - 1}{2x + 1} \right| + K_1.$$

Por tanto, $I = x \ln |4x^2 - 1| - 2x - I_1 = x \ln |4x^2 - 1| - 2x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x - 1}{2x + 1} \right| + K.$

Como $f(0) = 0 \rightarrow f(0) = 0 - 0 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-1}{1} \right| + K = 0 \rightarrow K = \frac{1}{2} \ln 1 = 0.$

Por consiguiente, $f(x) = x \ln |4x^2 - 1| - 2x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x - 1}{2x + 1} \right|.$

5. **Determinar la primitiva de $y = x^2$ que pasa por el punto (1, 2).**

Todas las primitivas de la función $y = x^2$ dependen de una constante K, que se determina con la condición de que $I = \int y\,dx$ sea tal que $I(1) = 2$.

$$I = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + K.$$

Como $I(1) = 2 \rightarrow \frac{1}{3} + K = 2 \rightarrow K = 2 - \frac{1}{3} = \frac{6 - 1}{3} = \frac{5}{3}.$

Por tanto, la primitiva pedida es $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}.$

6. **Hallar la primitiva de $y = x^2 \ln x$ que pasa por el punto (1, e).**

Todas las primitivas de la función $y = x^2 \ln x$ dependen de una constante K, que se determina con la condición de que $I = \int x^2 \ln x\,dx$ sea tal que $I(1) = e$.

Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x^2\,dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}, \end{cases}$ se obtiene:

$$I = \int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + K.$$

Como $I(1) = e \rightarrow \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{9} + K = e \rightarrow K = e - \frac{1}{3} 0 + \frac{1}{9} = e + \frac{1}{9}.$

Por consiguiente, la primitiva pedida es $f(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + e + \frac{1}{9}.$

7. **Hallar las siguientes integrales:**

a) $\int \sqrt{2 - x^2}\,dx.$ *b)* $\int \sqrt{3 - 3x^2}\,dx.$ *c)* $\int (x^2 - 2x - 3) \ln x\,dx.$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

a) Haciendo $x = \sqrt{2}\,\text{sen}\,u \rightarrow dx = \sqrt{2}\cos u\,du$;

$$\sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2 - 2\,\text{sen}^2 u} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 - \text{sen}^2 u} = \sqrt{2}\cos u;$$

sustituyendo en I, se obtiene:

$$I = \int \sqrt{2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{2}\cos u\,\sqrt{2}\cos u\,du = 2\int \cos^2 u\,du = 2\,I_1.$$

Como $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$, la integral I_1 se transforma en:

$$I_1 = \int \cos^2 u\,du = \int \frac{1 + \cos 2u}{2}\,du = \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \cos 2u\,du = \frac{u}{2} + \frac{\text{sen}\,2u}{4} + K_1.$$

$$I_1 = \frac{u}{2} + \frac{2\,\text{sen}\,u\cos u}{4} + K_1 = \frac{u}{2} + \frac{\text{sen}\,u\cos u}{2} + K_1.$$

Es decir, $I = 2\,I_1 = u + \text{sen}\,u\cos u + K = u + \text{sen}\,u\sqrt{1 - \text{sen}^2 u} + K$.

Deshaciendo el cambio $\text{sen}\,u = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow u = \text{arc sen}\,\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, resulta:

$$I = \text{arc sen}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} + K = \text{arc sen}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + K.$$

b) $\int \sqrt{3 - 3x^2}\,dx = \int \sqrt{3(1 - x^2)}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

Haciendo $x = \text{sen}\,u \rightarrow dx = \cos u\,du$ y sustituyendo en I, se deduce:

$$I = \int \sqrt{3 - 3x^2}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{1 - \text{sen}^2 u}\,\cos u\,du = \sqrt{3}\int \cos^2 u\,du = \sqrt{3}\,I_1.$$

La integral I_1 se ha calculado en el apartado anterior; es decir:

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}(u + \text{sen}\,u\cos u) + K = \frac{\sqrt{3}}{2}(u + \text{sen}\,u\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}) + K.$$

Deshaciendo el cambio $\text{sen}\,u = x \rightarrow u = \text{arc sen}\,x$, se obtiene:

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{arc sen}\,x + x\sqrt{1 - x^2}) + K.$$

c) Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = (x^2 - 2x - 3)\,dx \rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x, \end{cases}$ resulta:

$$I = \int (x^2 - 2x - 3)\ln x\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} - x - 3\right)dx;$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx + \int x\,dx + 3\int dx;$$

$$I = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + K.$$

TEMA III-5.1. —— Integral definida I

Ejercicios resueltos

1. *Calcular* $I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cdot \text{sen}\,(x^2)\,dx.$

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Como $D[\cos(x^2)] = -\text{sen}\,(x^2) \cdot 2x$, se puede escribir:

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \text{sen}\,(x^2) \cdot x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} -\text{sen}\,(x^2) \cdot 2x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} D[\cos(x^2)]\,dx.$$

$$I = -\frac{1}{2}\cos(x^2)\Big]_0^{\sqrt{\pi/2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

2. *Calcular* $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,3x\,dx.$

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

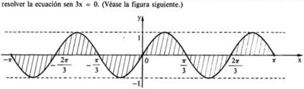
Dado que $D(\cos 3x) = -\text{sen}\,3x \cdot 3$, se tiene:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,3x\,dx = -\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\,3x \cdot (-3)\,dx = -\frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi} D(\cos 3x)\,dx.$$

$$I = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{3}[\cos 3\pi - \cos(-3\pi)] = -\frac{1}{3}[-1-(-1)] = 0.$$

Nota: Obsérvese que se pide la integral definida y no el área limitada por $y = \text{sen}\,3x$, el eje Ox y las ordenadas correspondientes a $x = -\pi$ y $x = \pi$.

Para hallar el área hay que descomponer el intervalo $[-\pi, \pi]$ en los subintervalos que resultan al resolver la ecuación $\text{sen}\,3x = 0$. (Véase la figura siguiente.)



La ecuación $\text{sen}\,3x = 0$, en el intervalo $[-\pi, \pi]$, admite las soluciones de $3x = k\pi\ \left(x = \frac{k\pi}{3}\right)$ para k igual a $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; es decir, los valores de x son $-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ y π.

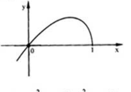
Para calcular el área habría que sumar los valores absolutos de la integral en los seis subintervalos determinados por los anteriores valores de x. Sin embargo, en este caso, por simetría, el área se halla más fácilmente así:

$$S = 6\int_0^{\pi/3} \text{sen}\,3x\,dx = 6\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big]_0^{\pi/3} = -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = 4\ u^2.$$

3. *Calcular el área de la zona del plano limitada por el eje de abscisas y la gráfica de la función* $y = x \cdot \sqrt{1-x}$.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

$$x \cdot \sqrt{1-x} = 0 \rightarrow x^2(1-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0, \\ 1 - x = 0 \rightarrow x = 1. \end{cases}$$



$$S = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x}\, dx.$$

Se determina una primitiva de dicha integral:

$F(x) = \int x \cdot (1-x)^{1/2} dx.$

Cambio: $1 - x = t \rightarrow x = 1 - t \rightarrow dx = -dt.$

$F(t) = -\int (1-t)t^{1/2} dt = -\int t^{1/2} dt + \int t^{3/2} dt.$

$$F(t) = -\frac{1}{3/2}t^{3/2} + \frac{1}{5/2}t^{5/2} = -\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2} \rightarrow F(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + \frac{2}{5}(1-x)^{5/2}.$$

Por consiguiente: $S = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^5}\Big]_0^1 = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-1)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-1)^5} +$

$$+ \frac{2}{3}\sqrt{(1-0)^3} - \frac{2}{5}\sqrt{(1-0)^5} = -0 + 0 + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{10-6}{15} = \frac{4}{15}\,u^2.$$

4. *Calcular* $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x\, dx.$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Dado que:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\} \text{ sumando miembro a miembro:}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b \rightarrow \operatorname{sen} a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a+b) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a-b).$$

Por tanto: $\operatorname{sen} x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x+2x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x-2x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-x) =$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x\, dx - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\, dx;$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-\cos 3x)\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2}.$$

$$I = \frac{1}{6}\left(-\cos\frac{3\pi}{2} + \cos 0\right) - \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = \frac{1}{6}(0+1) - \frac{1}{2}(0+1)$$

$$I = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1-3}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Calcular $I = \int_{-1}^{+1} (x^3 + \text{sen } x)\, dx$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

$$I = \int_{-1}^{+1} (x^3 + \text{sen } x)\, dx = \int_{-1}^{+1} x^3\, dx + \int_{-1}^{+1} \text{sen } x\, dx = \left. \frac{x^4}{4} - \cos x \right]_{-1}^{+1};$$

$$I = \left(\frac{1}{4} - \cos (1) \right) - \left(\frac{1}{4} - \cos (-1) \right) = 0.$$

Nota: Sin calcular la integral se puede afirmar que $I = 0$ observando que el integrando es una función impar y que los límites de integración son simétricos respecto del origen.

2. Hallar $I = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1}\, dx$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

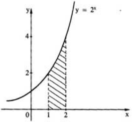
$$I = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(2x\, dx)}{x^2 - 1} = \left. \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| \right]_2^3;$$

$$I = \frac{1}{2} (\ln 8 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3} = 0{,}4904.$$

3. Calcular $I = \int_1^2 2^x\, dx$.

$$I = \int_1^2 2^x\, dx = \left. \frac{1}{\ln 2} 2^x \right]_1^2 = \frac{1}{\ln 2} (2^2 - 2^1) = \frac{2}{0{,}69315} = 2{,}8854.$$

4. Hallar el área limitada por el eje Ox en 3.



Como la función $y = 2^x$ es positiva, el área pedida es:

$$S = \int_1^2 2^x\, dx = 2{,}8854\ \text{u}^2.$$

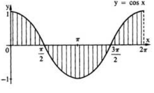
5. Hallar $I = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx$.

$$I = \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = \left. \text{sen } x \right]_0^{2\pi} = \text{sen } 2\pi - \text{sen } 0 = 0 - 0 = 0.$$

6. Calcular el área limitada por el eje Ox en **5.**

Se estudia el signo de la función $y = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Se calculan los ceros de la función en dicho intervalo: $y = \cos x = 0 \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

Resulta que la función es positiva en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ y negativa en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; por tanto, el área pedida es:



$$S = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos x \, dx;$$

$$S = \operatorname{sen} x \Big]_0^{\pi/2} - \operatorname{sen} x \Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \operatorname{sen} x \Big]_{3\pi/2}^{2\pi};$$

$$S = (1 - 0) + (-1 - 1) + (0 - (-1)) = 4 \text{ u}^2.$$

7. Hallar $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Se trata de la integral de una función racional. Se descompone el integrando como suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)} \rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Así pues, la integral pedida resulta ser:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+1| - \ln|x+2| \Big]_0^1;$$

$$I = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Bigg]_0^1 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3} = 0{,}2877.$$

Nota: Obsérvese que la función $y = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ y que la integral I se halla perfectamente definida.

8. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Se trata de la integral de una función racional. Se descompone el integrando como suma de fracciones simples; para lo cual previamente se calculan las raíces del polinomio denominador:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2$; de modo que se tiene:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)} \rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Así pues, la integral pedida resulta:

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x-3} - \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x-2} = \ln|x-3| - \ln|x-2| \Big]_{-1}^{+1};$$

$$I = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| \Bigg]_{-1}^{+1} = \ln 2 - \ln\frac{4}{3} = \ln\frac{3}{2} = 0{,}4055.$$

Nota: Obsérvese que la función $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y que la integral I se halla perfectamente definida.

9. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \left(x - 3 + \frac{1}{x-2}\right) dx.$

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

$$I = \int_{-1}^{+1} \left(x - 3 + \frac{1}{x-2}\right) dx = \int_{-1}^{+1} x\, dx - 3\int_{-1}^{+1} dx + \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-2}\, dx;$$

$$I = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x-2| \Big]_{-1}^{+1} = \left(\frac{1}{2} - 3 + \ln|-1|\right) - \left(\frac{1}{2} + 3 + \ln|-3|\right) = -7{,}0986.$$

Nota: Obsérvese que la función $y(x)$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y que la integral I se halla perfectamente definida.

10. Hallar $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2}\, dx.$

(Propuesto en la UNED.)

Se trata de la integral de una función racional. Como el grado del polinomio numerador es superior al del polinomio denominador se efectúa la división entera de ambos:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

Se descompone el último sumando como suma de fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1) + B}{(x-1)^2} = \frac{Ax + (B-A)}{(x-1)^2} \rightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = 1. \end{cases}$$

Así pues, la integral pedida resulta:

$$I = \int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2}\, dx = \int_2^3 \left(x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx;$$

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1}\Big]_2^3;$$

$$I = \left(\frac{9}{2} + 6 + 3\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - (2 + 4 + 3\ln 1 - 1) = 5 + 3\ln 2 = 7{,}0794.$$

Nota: Obsérvese que la función y(x) es continua en el intervalo [2, 3] y que la integral I se halla perfectamente definida.

11. Calcular $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Primeramente se calcula la correspondiente integral indefinida. Se trata de la integral de una función racional. Se empieza descomponiendo el polinomio denominador en factores utilizando la regla de Ruffini: $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

El segundo factor es un polinomio de segundo grado con raíces complejas conjugadas $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ y $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; por tanto, se descompone el integrando de la forma siguiente:

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Mx + N}{x^2 - x + 1} = \frac{A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1)}{x^3 + 1} =$$

$$= \frac{(A + M)x^2 + (-A + M + N)x + (A + N)}{x^3 + 1} \to \begin{cases} A + M = 0, \\ -A + M + N = 0, \\ A + N = 1. \end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ M = -\frac{1}{3}, \\ N = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Así pues, la integral indefinida correspondiente resulta:

$$I = \int \frac{1}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x + 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{3} I_1.$$

Se calcula la integral I_1:

$$I_1 = \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x - 1) - 3}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1};$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| - \frac{3}{2} I_2.$$

Se calcula la integral I_2, reduciéndola a una integral del tipo «arco tangente»:

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx;$$

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + K.$$

Sustituyendo en I los resultados anteriores, resulta:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1} = \left[\frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1;$$

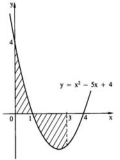
$$I = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{6}\ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{6}\ln 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$I = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}2310 + 0{,}6046 = 0{,}8356.$$

12. Hallar $I = \int_0^3 (x^2 - 5x + 4)\,dx$.

$$I = \int_0^3 (x^2 - 5x + 4)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\Big]_0^3 = \frac{27}{3} - \frac{45}{2} + 12 - 0 = -\frac{3}{2} = -1{,}5.$$

13. Calcular el área limitada por el eje Ox en **12**.



Se estudia el signo de la función $y = x^2 - 5x + 4$ en el intervalo [0, 3]. Se calculan las raíces de la ecuación

$$y = x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4;$$

resultando que $y \geqslant 0$ en el intervalo [0, 1] e $y \leqslant 0$ en el intervalo [1, 3].

Así pues, el área pedida es:

$$S = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)\,dx - \int_1^3 (x^2 - 5x + 4)\,dx;$$

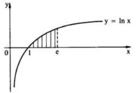
$$S = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\Big]_0^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x\right)\Big]_1^3;$$

$$S = \frac{11}{6} - 0 + \frac{3}{2} + \frac{11}{6} = \frac{31}{6}\,u^2 = 5{,}1667\,u^2.$$

14. Calcular $I = \int_1^e \ln x\,dx$.

$$I = \int_1^e \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x\Big]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

15. Hallar el área limitada por el eje Ox en **14**.



Como la función $y = \ln x$ es positiva para $x \geqslant 1$, se tiene que el área pedida coincide con el valor de la integral calculada en el ejercicio anterior:

$$S = 1\,u^2.$$

16. Determinar a y b para que sea continua la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a, x \leq -1 \\ ax + b, -1 < x \leq 0 \\ 3x^2 + 2, x > 0 \end{cases}$$

y calcular $I = \int_2^{-1} f(x)\, dx$.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

La función f(x) es una función definida a trozos. Como la función en el interior de los trozos es continua, para que f(x) sea globalmente continua debe ocurrir que coincidan los valores de la función en los extremos de los intervalos de definición; es decir:

$$\begin{cases} f(-1) = 2^{-1} + a = a(-1) + b \\ f(0) = a \cdot 0 + b = 3 \cdot 0^2 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} + a = -a + b \\ b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4}, \\ b = 2. \end{cases}$$

Así pues, la función f(x) queda definida por $f(x) = \begin{cases} 2^x + \dfrac{3}{4}, \text{ si } x \leqslant -1, \\ \dfrac{3}{4}x + 2, \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 3x^2 + 2, \text{ si } x > 0. \end{cases}$

La integral pedida resulta:

$$I = \int_2^{-1} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = -\int_{-1}^{0} f(x)\, dx - \int_0^2 f(x)\, dx;$$

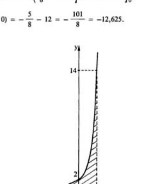
$$I = -\int_{-1}^{0}\left(\frac{3}{4}x + 2\right) dx - \int_0^2 (3x^2 + 2)\, dx = -\left(\frac{3}{8}x^2 + 2x\right]_{-1}^{0} - (x^3 + 2x\Big]_0^2;$$

$$I = -\left(0 - \left(\frac{3}{8} - 2\right)\right) - (8 + 4 - 0) = -\frac{5}{8} - 12 = -\frac{101}{8} = -12{,}625.$$

17. ¿Cuál es el área en el ejercicio anterior?

Como la función $y = f(x)$ es siempre positiva, el área pedida es igual al valor absoluto del valor de la integral calculada en el ejercicio anterior; es decir:

$$S = \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \frac{101}{8}\, u^2 = 12{,}625\, u^2.$$

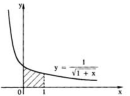


18. Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1} = 2(\sqrt{2} - 1) = 0{,}8284.$$

Nota: Obsérvese que la función integrando está definida y es continua en el intervalo [0, 1] y, por tanto, la integral se halla perfectamente determinada.

19. Hallar el área limitada por el eje Ox en **18.**



La función $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ está definida para $x > -1$ y es positiva en su dominio de definición; por tanto, el área pedida es igual al valor de la integral calculada en el ejercicio anterior:

$$S = 0{,}8284 \text{ u}^2.$$

20. Siendo $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, determinar a y b para que en un sistema cartesiano $y = f(x)$ pase por el punto $A(-2, -6)$ y admita en ese punto una tangente horizontal. Calcular el área limitada por la curva, el eje Ox y las ordenadas correspondientes a $x = 1$ y $x = 2$.

(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)

Si la función $y = f(x)$ pasa por el punto $A(-2, -6)$, entonces $f(-2) = -6$; por tanto,

$$-2a + b + \frac{8}{-2} = -6 \rightarrow -2a + b = -2.$$

Si la función $y = f(x)$ tiene tangente horizontal en el punto $A(-2, -6)$, entonces $f'(-2) = 0$, por consiguiente, como $f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$, se tiene que $f'(-2) = a - 2 = 0$.

Ambas condiciones dan origen al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 2. \end{cases}$$

Resultando que $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} = \frac{2(x^2 + x + 4)}{x}$.

Se estudia el signo de la función $y = f(x)$.

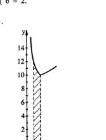
Como el numerador es un polinomio de segundo grado con raíces complejas, es positivo para cualquier valor de la variable; por tanto, el signo de $f(x)$ es igual al signo de x. En consecuencia, el área pedida viene dada por:

$$S = \int_1^2 \left(2x + 2 + \frac{8}{x}\right) dx =$$

$$= x^2 + 2x + 8 \ln |x| \Big]_1^2;$$

$$S = (4 + 4 + 8 \ln 2) - (1 + 2 + 8 \ln 1);$$

$$S = 5 + 8 \ln 2 = 10{,}5452 \text{ u}^2.$$



21. Calcular $I = \int_0^1 x \cdot e^x \, dx$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

Integrando por partes, se tiene:

$$I = \int_0^1 x \cdot e^x \, dx = e^x(x - 1) \Big]_0^1 = e \cdot (1 - 1) - 1 \cdot (-1) = 1.$$

22. Hallar $\int_0^{\pi/2} 3 \cos x \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx$.

Para calcular la integral propuesta se utiliza la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2},$$

en la que se realiza la identificación:

$$\begin{cases} x = \dfrac{A - B}{2} \\ 3x = \dfrac{A + B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4x, \\ B = 2x, \end{cases}$$

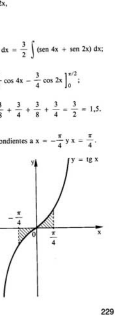
resultando:

$$I = \int_0^{\pi/2} 3 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} 3x \, dx = \frac{3}{2} \int (\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x) \, dx;$$

$$I = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 4x \, dx + \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{3}{8} \cos 4x - \frac{3}{4} \cos 2x \Big]_0^{\pi/2};$$

$$I = -\frac{3}{8} \cos 2\pi - \frac{3}{4} \cos \pi + \frac{3}{4} \cos 0 + \frac{3}{4} \cos 0 = -\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

23. Calcular el área limitada por $y = \operatorname{tg} x$ y las ordenadas correspondientes a $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.



Teniendo en cuenta que la función $y = \operatorname{tg} x$ es simétrica respecto al origen O, resulta que el área pedida es:

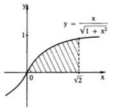
$$S = 2 \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx = -2 \int_0^{\pi/4} \frac{(-\operatorname{sen} x)dx}{\cos x};$$

$$S = -2 \ln |\cos x| \Big]_0^{\pi/4};$$

$$S = -2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \ln 1 = \ln 2 \ u^2;$$

$$S = 0{,}6931 \ u^2.$$

24. Hallar el área limitada por el eje Ox, las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$ y la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.



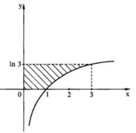
El signo de la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ coincide con el signo de la variable x; por tanto, el área pedida viene dada por:

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \sqrt{1 + x^2}\,\Big]_0^{\sqrt{2}};$$

$$S = \sqrt{3} - \sqrt{1} = (\sqrt{3} - 1)\ u^2 = 0{,}7321\ u^2.$$

25. Hallar el área limitada por $y = \ln x$, el eje Ox, el eje Oy y la recta $y = \ln 3$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)



Observando la gráfica de la función, resulta que el área del recinto que se propone es la del rectángulo de vértices (0, 0), (0, ln 3), (3, ln 3) y (3, 0) menos el área de la figura que está limitada por la gráfica de la función $y = \ln x$ y el eje Ox entre las ordenadas correspondientes a las abscisas $x = 1$ y $x = 3$; es decir:

$$S = 3 \ln 3 - \int_1^3 \ln x\, dx;$$

$$S = 3 \ln 3 - (x \ln x - x)\Big]_1^3;$$

$$S = 3 \ln 3 - [3 \ln 3 - 3 - (1 \ln 1 - 1)] = 2\ u^2.$$

26. Hallar $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x\, dx.$

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Previamente se calcula la correspondiente integral indefinida:

$$J = \int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x\, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^4 x\, dx;$$

$$J = \int \cos^4 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^6 x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + K.$$

Así pues, la integral pedida resulta ser:

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x\, dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\,\Big]_0^{\pi/2};$$

$$I = -\frac{1}{5}\cos^5\frac{\pi}{2} + \frac{1}{7}\cos^7\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\cos^5 0 - \frac{1}{7}\cos^7 0;$$

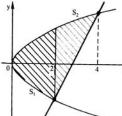
$$I = -0 + 0 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35} = 0{,}05714.$$

TEMA III-5.2. —— Integral definida II

Ejercicios resueltos

1. *Determinar el área del recinto limitado por la parábola* $y^2 - 2x = 0$ *y la recta que une los puntos* $(2, -2)$ *y* $(4, 2\sqrt{2})$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)



La ecuación de la recta dada por los puntos $(2, -2)$ y $(4, 2\sqrt{2})$ es:

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y+2}{2\sqrt{2}+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = (1+\sqrt{2})x - 4 - 2\sqrt{2}.$$

El área pedida es la suma de las áreas de los recintos S_1 (rayado en negro en la figura) y S_2 (rayado en color en la figura).

S_1 por simetría respecto al eje Ox es:

$$S_1 = \int_0^2 \pm\sqrt{2x}\,dx = 2\int_0^2 \sqrt{2x}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^2 x^{1/2}\,dx.$$

$$S_1 = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{3/2}\,x^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,x\sqrt{x}\Big]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-0) = \frac{16}{3}\,u^2.$$

$$S_2 = \int_2^4 \sqrt{2x}\,dx - \int_2^4 [(1+\sqrt{2})x - 4 - 2\sqrt{2}]\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{3/2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,x^2 + (4+2\sqrt{2})x\Big]_2^4.$$

$$S_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8 - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot 16 + (4+2\sqrt{2})\cdot 4 - \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot 4 + (4+2\sqrt{2})\cdot 2\right] =$$

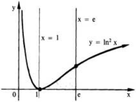
$$= \frac{10\sqrt{2}-2}{3}\,u^2.$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{16}{3} + \frac{10\sqrt{2}-2}{3} = \frac{14+10\sqrt{2}}{3}\,u^2.$$

2. *Calcular el área de la zona del plano limitada por las rectas* $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ *y la gráfica* $y = \ln^2 x$.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

$$S = \int_1^e \ln^2 x\,dx.$$



Integrando por partes, resulta:

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \rightarrow du = (\ln x)\cdot\dfrac{2}{x}\,dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

$$S = x\cdot\ln^2 x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{2}{x}\cdot\ln x\,dx.$$

$$S = e\cdot\ln^2 e - 1\cdot\ln^2 1 - 2\int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= e\cdot 1^2 - 1\cdot 0 - 2\int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= e - 2\int_1^e \ln x\,dx.$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow S = e - 2x \cdot \ln x \Big]_1^e + 2\int_1^e x \cdot \frac{1}{2}\,dx = e - 2x \cdot \ln x \Big]_1^e + 2x \Big]_1^e.$$

$$S = e - 2e \cdot \ln e + 2 \cdot \ln 1 + 2e - 2 = e - 2e + 2e - 2 = (e - 2)u^2.$$

3. *Dada la curva* $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ *hallar* b, $(b > 3)$, *tal que el área comprendida entre la curva, el eje* Ox *y las ordenadas correspondientes a* $x = 3$ *y* $x = b$ *sea* $\ln \sqrt[4]{(b + 2)^3}$.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Para $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$; $b > 3 > 1$, la curva en el intervalo $[3, b]$ queda en un mismo semiplano (el de las ordenadas positivas).

$$\int_3^b \frac{x - 1}{x^2 - 4}\,dx = \int_3^b \frac{x - 1}{(x - 2)(x + 2)}\,dx = \int_3^b \frac{A\,dx}{x - 2} + \int_3^b \frac{B\,dx}{x + 2}.$$

$$x - 1 = A(x + 2) + B(x - 2) \left\{\begin{array}{l} \text{Para } x = 2\text{: } 2 - 1 = A \cdot 4 + B \cdot 0 \rightarrow A = \dfrac{1}{4}; \\ \text{para } x = -2\text{: } -2 - 1 = A \cdot 0 + B \cdot (-4) \rightarrow B = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

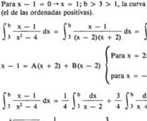
$$\int_3^b \frac{x - 1}{x^2 - 4}\,dx = \frac{1}{4}\int_3^b \frac{dx}{x - 2} + \frac{3}{4}\int_3^b \frac{dx}{x + 2} = \frac{1}{4}\ln(x - 2) + \frac{3}{4}\ln(x + 2)\Big]_3^b.$$

$$\ln \sqrt[4]{(b + 2)^3} = \frac{1}{4}\ln(b - 2) + \frac{3}{4}\ln(b + 2) - \frac{1}{4}\ln(3 - 2) - \frac{3}{4}\ln(3 + 2);$$

$$\ln \sqrt[4]{(b + 2)^3} = \ln \sqrt[4]{(b - 2)} + \ln \sqrt[4]{(b + 2)^3} - \frac{1}{4} \cdot 0 - \ln \sqrt[4]{5^3};$$

$$\ln \sqrt[4]{(b - 2)} = \ln \sqrt[4]{5^3} \rightarrow \sqrt[4]{b - 2} = \sqrt[4]{125} \rightarrow b - 2 = 125 \rightarrow b = 127.$$

4. *Hallar el área comprendida entre la parábola* $x = 8 + 2y - y^2$, *el eje* Oy *y las rectas* $y = -1$ *e* $y = 3$.



El área de un recinto plano respecto al eje Oy, viene expresada por:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} x \cdot dy,$$

que proviene de subdividir el recinto en franjas horizontales. Por tanto, en el presente ejercicio:

$$S = \int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\,dy =$$

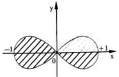
$$= 8y + 2 \cdot \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\Big]_{-1}^{3}.$$

$$S = \left(8 \cdot 3 + 3^2 - \frac{1}{3} \cdot 3^3\right) - \left[8(-1) + (-1)^2 - \frac{1}{3}(-1)^3\right] = 24 - \left(-7 + \frac{1}{3}\right) = \frac{92}{3}\,u^2.$$

5. *Calcular el área limitada por la curva* $y^2 = x^2 - x^4$.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x^2 - x^4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) \rightarrow \\ \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1. \end{array}$$

Dado que la curva es simétrica respecto de los ejes Ox y Oy, el área encerrada por ella es:



$$S = 4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx = 4\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\,x\,dx.$$

Cambio: $1 - x^2 = t \rightarrow -2x\,dx = dt \rightarrow$

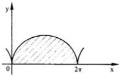
$$\rightarrow x\,dx = -\frac{dt}{2}.$$

Los nuevos límites de la integral son:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } x = 0 \rightarrow t = 1 \\ \text{Para } x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto: $S = 4\displaystyle\int_1^0 t^{1/2}\left(-\frac{dt}{2}\right) = -2\left.\frac{t^{3/2}}{2/3}\right]_1^0 = -\frac{4}{3}\left.\sqrt{t^3}\right]_1^0 = -0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\,u^2.$

6. *Hallar el área limitada por un arco de cicloide de ecuaciones* $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.



$y = 1 - \cos t = 0 \rightarrow \cos t = 1$; con soluciones en $[0, 2\pi]$: $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Por otro lado:

$x = t - \operatorname{sen} t \rightarrow dx = (1 - \cos t)\,dt.$

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt.$$

Como $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$, resulta:

$$S = \int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$= \left.\frac{3}{2}t - 2\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi}.$$

$$S = \frac{3}{2}\cdot 2\pi - 2\operatorname{sen} 2\pi + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\pi - \frac{3}{2}\cdot 0 + 2\operatorname{sen} 0 - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 0 = 3\pi\,u^2.$$

7. *Calcular* $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

$\sqrt{9 - x^2} = 0 \rightarrow 9 = x^2 \rightarrow x = \pm 3$; el integrando presenta discontinuidad en $x = 3 = b$.

Por tanto: $I = \displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$

Cambio: $x = 3\operatorname{sen} t \rightarrow dx = 3\cos t\,dt$; $x^2 = 9\operatorname{sen}^2 t$;

$9 - x^2 = 9 - 9\operatorname{sen}^2 t = 9(1 - \operatorname{sen}^2 t) = 9\cos^2 t.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{3\cos t\,dt}{\sqrt{9\cos^2 t}} = \int \frac{3\cos t\,dt}{3\cos t} = \int dt = t = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}.$$

$$I = \lim_{\epsilon \to 0} \left.\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{3}\right]_0^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{3 - \epsilon}{3} - \operatorname{arc\,sen}\frac{0}{3}\right) = \operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

8. *Probar que* $\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$ *carece de sentido.*

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$; el integrando presenta discontinuidad en $x = 2 = b$.

Por tanto: $\int_0^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\epsilon \to 0} \ln (x-2) \Big]_0^{2-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\ln \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{1}{2} \right)$.

No existe el $\lim_{\epsilon \to 0} \ln \frac{1}{\epsilon}$, por lo que la integral carece de sentido.

9. *Calcular* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Dado que ambos límites de integración son «infinitos», se tiene:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Por otro lado: $\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x \cdot 1}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x}{(e^x)^2 + e^x \cdot e^{-x}} = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$.

Como $D(e^x) = e^x$, se tiene:

$$I = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{e^x\, dx}{(e^x)^2 + 1} + \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{e^x\, dx}{(e^x)^2 + 1} = \lim_{b \to +\infty} \text{arc tg } e^x \Big]_0^b + \lim_{a \to -\infty} \text{arc tg } e^x \Big]_a^0.$$

$$I = \lim_{b \to +\infty} \text{arc tg } e^b - \text{arc tg } e^0 + \text{arc tg } e^0 - \lim_{a \to +\infty} \text{arc tg } e^{-a} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (x - e^x \cos x)\, dx$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

b) $\int_0^{2\pi} \text{sen } \frac{1}{2} x\, dx$.

c) $\int_0^2 2^x x^2 dx$.

d) $\int_0^{\pi/3} x^2 \cdot \text{sen } 3x\, dx$.

e) $\int_3^{11} \sqrt{2x+3}\, dx$.

f) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \text{sen } x}$.

g) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

a) Previamente se calcula la correspondiente integral indefinida:

$$J = \int (x - e^x \cos x)\, dx = \int x\, dx - \int e^x \cos x\, dx = \frac{x^2}{2} - J_1.$$

La integral $J_1 = \int e^x \cos x\, dx$ se calcula integrando por partes. Haciendo

$\left\{ \begin{array}{l} u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx, \\ dv = \cos x\, dx \rightarrow v = \text{sen } x, \end{array} \right.$ resulta:

$$J_1 = \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x \text{ sen } x\, dx = e^x \text{ sen } x - J_2.$$

La integral $J_2 = \int e^x \text{ sen } x\, dx$ se calcula integrando de nuevo por partes. Haciendo

$\left\{ \begin{array}{l} u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx, \\ dv = \text{sen } x\, dx \rightarrow v = -\cos x, \end{array} \right.$ se deduce:

$$J_2 = \int e^x \text{ sen } x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx = -e^x \cos x + J_1.$$

Sustituyendo J_2 en la expresión de J_1, se tiene:

$$J_1 = e^x \text{ sen } x - J_2 = e^x \text{ sen } x + e^x \cos x + J_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\, J_1 = e^x \text{ sen } x + e^x \cos x \rightarrow J_1 + \frac{1}{2} e^x (\text{sen } x + \cos x).$$

Así pues, reemplazando el valor de J_1 en la expresión de J, resulta:

$$J = \frac{x^2}{2} - J_1 = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} e^x (\text{sen } x + \cos x) + K.$$

La integral definida propuesta es:

$$I = \int_0^1 (x - e^x \cos x)\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} e^x (\text{sen } x + \cos x) \Big]_0^1;$$

$$I = \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{2} (\text{sen } 1 + \cos 1) \right) - \left(0 - \frac{1}{2} (\text{sen } 0 + \cos 0) \right) = 0{,}8780.$$

b) Se hace el cambio de variable $u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{1}{2} dx$. Los nuevos límites de integración son:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{para } x = 2\pi \rightarrow u = \pi, \\ \text{para } x = 0 \rightarrow u = 0. \end{array} \right.$ Así pues, se tiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \text{sen } \frac{1}{2} x\, dx = 2 \int_0^{\pi} \text{sen } u\, du = -2 \cos u \Big]_0^{\pi};$$

$$I = -2 \cos \pi + 2 \cos 0 = 2 + 2 = 4.$$

c) Se calcula previamente la correspondiente integral indefinida. Se integra por partes; haciendo

$\left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx, \\ dv = 2^x\, dx \rightarrow v = \dfrac{1}{\ln 2} 2^x, \end{array} \right.$ resulta:

$$J = \int 2^x x^2\, dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x x^2 - \frac{2}{\ln 2} \int 2^x x\, dx.$$

Integrando de nuevo por partes, haciendo $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx, \\ dv = 2^x\, dx \rightarrow v = \dfrac{1}{\ln 2} 2^x, \end{cases}$

se tiene:

$$J = \frac{1}{\ln 2} 2^x x^2 - \frac{2}{\ln 2}\left(\frac{1}{\ln 2} x\, 2^x - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\, dx\right);$$

$$J = \frac{1}{\ln 2} 2^x x^2 - \frac{2}{(\ln 2)^2} 2^x x + \frac{2}{(\ln 2)^2}\cdot\frac{1}{\ln 2} 2^x + K;$$

$$J = \frac{1}{\ln 2} 2^x\left(x^2 - \frac{2}{\ln 2} x + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right) + K.$$

Así pues, la integral definida propuesta resulta:

$$I = \int_0^2 2^x x^2\, dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x\left(x^2 - \frac{2}{\ln 2} x + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right)\Bigg]_0^2;$$

$$I = \frac{1}{\ln 2} 2^2\left(4 - \frac{4}{\ln 2} + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right) - \frac{1}{\ln 2} 2^0\left(0 - 0 + \frac{2}{(\ln 2)^2}\right);$$

$$I = 13{,}8035 - 6{,}0056 = 7{,}7979.$$

d) Previamente se calcula la correspondiente integral indefinida. Se integra por partes; haciendo

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx, \\ dv = \operatorname{sen} 3x\, dx \rightarrow v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x, \end{cases}$$

resulta:

$$J = \int x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \cos 3x\, dx.$$

Integrando de nuevo por partes, haciendo $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx, \\ dv = \cos 3x\, dx \rightarrow v = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x, \end{cases}$

se tiene:

$$J = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{9}\int \operatorname{sen} 3x\, dx;$$

$$J = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + K.$$

Así pues, la integral definida pedida resulta:

$$I = \int_0^{\pi/3} x^2 \operatorname{sen} 3x\, dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{27}\cos 3x\,\Bigg]_0^{\pi/3};$$

$$I = \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cos\pi + \frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\pi + \frac{2}{27}\cos\pi\right) - \left(-0 + 0 + \frac{2}{27}\cos 0\right);$$

$$I = \frac{\pi^2}{27} + 0 - \frac{2}{27} - \frac{2}{27} = \frac{\pi^2 - 4}{27} = 0{,}2174.$$

e) Se hace el cambio de variable $u = 2x + 3 \rightarrow du = 2\,dx$. Los nuevos límites de integración son:

$$\begin{cases} \text{para } x = 3 \rightarrow u = 9, \\ \text{para } x = 11 \rightarrow u = 25. \end{cases}$$

$$I = \int_3^{11} \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_9^{25} u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\,u^{3/2}\Big]_9^{25} = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3} = 32{,}6667.$$

f) Se realiza en el integrando la transformación siguiente:

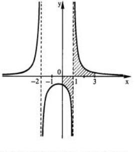
$$\frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}.$$

La integral propuesta resulta:

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^{\pi/3} + \frac{1}{\cos x}\Big]_0^{\pi/3};$$

$$I = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 0 + \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = \sqrt{3} - 0 + 2 - 1 = \sqrt{3} + 1 = 2{,}7321.$$

g) Se trata de una integral impropia, ya que la función $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$ no está acotada en el intervalo de integración (obsérvese la gráfica de la función).



Se estudia la convergencia de la integral.

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)(x+2)} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)(x+2)} + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{1+\epsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$$

Previamente se calcula la correspondiente integral indefinida; para ello se descompone el integrando como suma de fracciones elementales

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ B = -\dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

de modo que resulta:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + K =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + K.$$

Así pues,

$$I = \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Bigg]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Bigg]_{1+\epsilon}^3;$$

$$I = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\epsilon}{3-\epsilon} \right| - \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} \right) + \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\epsilon}{3+\epsilon} \right| \right).$$

Recordando que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ (divergente), resulta que los dos límites anteriores no existen, y, por tanto, la integral I es divergente.

Nota: ver la nota al final del ejercicio **21** de este capítulo.

2. Comprobar que $\displaystyle\int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta} = \frac{\pi}{9}$.

Haciendo el cambio de variable $t = \operatorname{tg} \dfrac{\theta}{2} \;\rightarrow\; \cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2};\; d\theta = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

Los límites de integración se transforman del siguiente modo: $\begin{cases} \theta = 0 \;\rightarrow\; t = 0, \\ \theta = \dfrac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; t = \sqrt{3}, \end{cases}$ de manera que la integral propuesta resulta:

$$I = \int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{5 + \dfrac{4(1-t^2)}{1+t^2}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{9+t^2} = \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\dfrac{1}{3}\,dt}{1 + \left(\dfrac{t}{3}\right)^2};$$

$$I = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{3} \Bigg]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{9}.$$

3. Hallar el área del recinto plano determinado por $y = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ y las ordenadas correspondientes a $x = 1$ y $x = 3$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Se descompone el integrando como suma de fracciones elementales

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{Ax^2 + A + Mx^2 + Nx}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+M)x^2 + Nx + A}{x(x^2+1)} \;\rightarrow\; \begin{cases} A = 1, \\ M = -1, \\ N = 0, \end{cases}$$

de modo que la integral pedida resulta:

$$I = \int_1^3 \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| \Big]_1^3;$$

$$I = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| \Bigg]_1^3 = \ln \frac{3}{\sqrt{10}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = -0{,}05268 + 0{,}34657 = 0{,}29389.$$

4. Calcular el área comprendida entre la función $y = x \cdot e^x$, la recta $y = 0$, y la ordenada correspondiente al valor mínimo de la función.

Se calcula el mínimo de la función $y = x \cdot e^x$, para lo cual se buscan los valores que anulan la primera derivada:

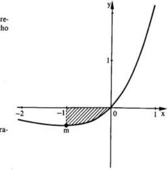
$$y' = e^x(1 + x);\ y' = 0 \ \rightarrow\ x = -1.$$

Se comprueba que para $x = -1$ la función presenta un mínimo estudiando el signo para dicho valor de la segunda derivada:

$$y'' = e^x(2 + x) \ \rightarrow\ y''(-1) = \frac{1}{e} > 0.$$

El área pedida viene dada por:

$$S = |I| = \left| \int_{-1}^{0} x\, e^x\, dx \right|.$$



La integral I se calcula por el método de integración por partes; haciendo

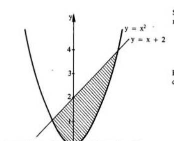
$$\begin{cases} u = x \ \rightarrow\ du = dx, \\ dv = e^x\, dx \ \rightarrow\ v = e^x, \end{cases} \text{ resulta:}$$

$$I = \int_{-1}^{0} x \cdot e^x\, dx = x\, e^x \Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x\, dx = (0 + e^{-1}) - e^x \Big]_{-1}^{0} = e^{-1} - (1 - e^{-1}) = 2\, e^{-1} - 1.$$

Así pues, el área pedida es $S = |I| = 1 - 2\, e^{-1} = 0{,}2642$.

5. Hallar el área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)



Se estudian los puntos comunes de ambas curvas resolviendo la ecuación:

$$x^2 = x + 2 \ \rightarrow\ x^2 - x - 2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x_1 = -1 \text{ y } x_2 = 2.$$

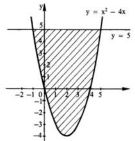
El área comprendida entre ambas curvas viene dada por la integral definida siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [(x + 2) - x^2]\, dx;$$

$$S = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{2};$$

$$S = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}\, u^2.$$

6. Hallar el área limitada por $y = x^2 - 4x$ e $y = 5$.
(Propuesto en la Univ. de Alicante.)



En primer lugar se determinan los puntos comunes de ambas curvas resolviendo la ecuación:

$x^2 - 4x = 5 \rightarrow x_1 = -1$ y $x_2 = 5$

El área pedida viene dada por la integral definida siguiente:

$$S = \int_{-1}^{5} [5 - (x^2 - 4x)]\, dx;$$

$$S = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\, dx;$$

$$S = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \Big]_{-1}^{5};$$

$$S = \left(-\frac{125}{3} + 50 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right);$$

$$S = \frac{100}{3} + \frac{8}{3} = \frac{108}{3} = 36\ u^2.$$

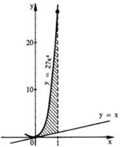
7. Calcular el área limitada por $y = 27x^4$, $y = x$ y $x = 1$.

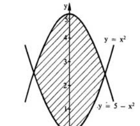
(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

Como las funciones $y = 27x^4$ e $y = x$ no tienen más punto común que el origen, resulta que el área pedida viene dada por la integral definida

$$S = \int_0^1 (27x^4 - x)\, dx = \frac{27}{5}x^5 - \frac{x^2}{2}\Big]_0^1;$$

$$S = \frac{27}{5} - \frac{1}{2} = \frac{49}{10}\ u^2.$$





8. Hallar el área limitada por $y = 5 - x^2$ e $y = x^2$.
(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Se determinan los puntos comunes de ambas curvas resolviendo la ecuación:

$$5 - x^2 = x^2 \rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ y } x_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

El área comprendida entre ambas curvas viene dada por la integral:

$$S = \int_{-\sqrt{2,5}}^{\sqrt{2,5}} [(5 - x^2) - x^2]\, dx;$$

$$S = \int_{-\sqrt{2,5}}^{\sqrt{2,5}} (5 - 2x^2)\, dx;$$

$$S = \left(5x - \frac{2}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{2,5}}^{\sqrt{2,5}} = (5\sqrt{2,5} - \frac{2}{3} \cdot 2,5\sqrt{2,5}) - (-5\sqrt{2,5} + \frac{2}{3} \cdot 2,5\sqrt{2,5}) = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\, u^2.$$

9. Calcular el área comprendida entre $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

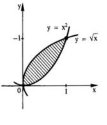
Se calculan los puntos comunes de ambas funciones.

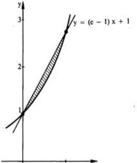
$$x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 1.$$

El área pedida resulta ser:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1;$$

$$S = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\, u^2.$$





10. Hallar el área limitada por $y = e^x$ y la cuerda de la curva que une los puntos de abscisas 0 y 1.

(Propuesto en la Univ. de Zaragoza.)

La cuerda de la curva $y = e^x$ que une los puntos de abscisas 0 y 1 es la recta que pasa por los puntos $(0, e^0)$ y $(1, e^1)$; es decir, la recta de ecuación $y = (e - 1)x + 1$.

El área limitada por la curva y la cuerda dada es:

$$S = \int_0^1 [(e - 1)x + 1 - e^x]\, dx;$$

$$S = \frac{e - 1}{2} x^2 + x - e^x \Big]_0^1;$$

$$S = \left(\frac{e-1}{2} + 1 - e\right) - (0 + 0 - 1) = \frac{3 - e}{2}\, u^2.$$

11. Dada la función $f(x) = \frac{1}{2} e^x - 2 \cdot e^{-x}$, hallar el área del dominio de forma triangular que limitan la curva $y = f(x)$ y los ejes coordenados.

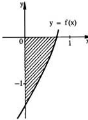
(Propuesto en la Univ. de Sevilla.)

Se determinan los puntos de corte de la función f(x) con los ejes coordenados.

Con el eje Ox:

$$\frac{1}{2}e^x - 2e^{-x} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} - 2 = 0 \rightarrow e^{2x} = 4 \rightarrow x = \ln\sqrt{4} = \ln 2 \rightarrow \text{punto } (\ln 2, 0).$$

Con el eje Oy: $f(0) = \frac{1}{2}e^0 - 2e^0 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \rightarrow$ punto $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.



El área pedida viene dada por:

$$S = \left| \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{2}e^x - 2e^{-x}\right) dx \right|;$$

$$S = \left| \left[\frac{1}{2}e^x + 2e^{-x}\right]_0^{\ln 2} \right|;$$

$$S = \left| (1 + 1) - \left(\frac{1}{2} + 2\right) \right| = \frac{1}{2}\,u^2.$$

12. Hallar el área del recinto plano acotado en el primer cuadrante del plano (coordenadas no negativas) por las gráficas de $f(x) = 1 + x^5$ y $g(x) = 3 - x$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Representando las gráficas de las funciones $y = x^5 + 1$ e $y = 3 - x$ se observa que el área pedida se descompone como suma de las áreas de dos recintos S_1 y S_2, de forma que resulta:

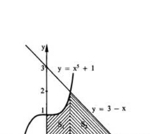
$$S = S_1 + S_2;$$

$$S = \int_0^1 (x^5 + 1)\,dx + \int_1^3 (3 - x)\,dx;$$

$$S = \left.\frac{x^6}{6} + x\right]_0^1 + \left.3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3;$$

$$S = \left[\left(\frac{1}{6} + 1\right) - 0\right] + \left[\left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right];$$

$$S = \frac{7}{6} + 2 = \frac{19}{6}\,u^2.$$



13. Hallar el área limitada por $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -x^2 + 4x + 1$.

(Propuesto en la Univ. de Baleares.)

En primer lugar se determinan los puntos comunes de ambas curvas, para lo cual se resuelve la ecuación:

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 4x + 1 \rightarrow$$

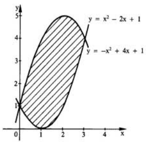
$$\rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 3.$$

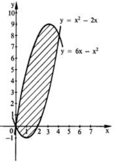
El área encerrada por ambas parábolas es:

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1)]\, dx;$$

$$S = \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx;$$

$$S = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 \Big]_0^3 = -18 + 27 = 9 \text{ u}^2.$$





14. Hallar el área limitada por $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Los puntos comunes de ambas parábolas son las soluciones de la ecuación

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 4.$$

El área pedida resulta ser:

$$S = \int_0^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)]\, dx;$$

$$S = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\, dx;$$

$$S = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 \Big]_0^4;$$

$$S = \left(-\frac{128}{3} + \frac{128}{2}\right) - 0 = \frac{64}{3} \text{ u}^2.$$

15. Calcular el área de la figura plana situada en el primer cuadrante y limitada por $x^2 + y^2 = 4x$ e $y^2 = 2x$.

(Propuesto en la Univ. del País Vasco.)

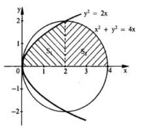
La ecuación $x^2 + y^2 = 4x$ representa una circunferencia de radio $r = 2$ y centrada en el punto (2,0) como queda de manifiesto al escribirla de la forma: $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$.

La ecuación $y^2 = 2x$ representa una parábola que tiene su vértice en el origen y por eje el de abscisas.

Los puntos comunes de ambas curvas son las soluciones de la ecuación

$$y^2 = 2x = 4x - x^2 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 2.$$



A la vista de la representación gráfica de ambas curvas, resulta que el área buscada se descompone como suma de las áreas de dos recintos S_1 y S_2, de modo que:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx + \int_2^4 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx.$$

Se calcula separadamente S_1 y S_2.

$$S_1 = \int_0^2 \sqrt{2x}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Para calcular S_2 (que es el área de un cuadrante del círculo de radio 2) se hace el cambio de variable $\operatorname{sen} t = \frac{x-2}{2} \rightarrow x = 2\operatorname{sen}t + 2 \rightarrow dx = 2\cos t\,dt.$

Los límites de integración se transforman del siguiente modo: $\begin{cases} x = 2 \rightarrow \operatorname{sen} t = 0 \rightarrow t = 0, \\ x = 4 \rightarrow \operatorname{sen} t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

resultando que:

$$S_2 = 2\int_2^4 \sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}\,dx;$$

$$S_2 = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt;$$

$$S_2 = 4\left(\frac{t}{2} + \operatorname{sen} 2t\right)\Big]_0^{\pi/2} = 4\left[\left(\frac{\pi}{4}+0\right) - (0+0)\right] = \pi.$$

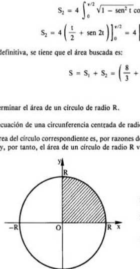
En definitiva, se tiene que el área buscada es:

$$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{8}{3} + \pi\right)u^2 \approx 5{,}80826\ u^2$$

16. Determinar el área de un círculo de radio R.

La ecuación de una circunferencia centrada de radio R es: $x^2 + y^2 = R^2$.

El área del círculo correspondiente es, por razones de simetría, cuatro veces la de uno de sus cuadrantes, y, por tanto, el área de un círculo de radio R viene dada por:



$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Se hace el cambio de variable:

$$x = R\operatorname{sen}t \rightarrow dx = R\cos t\,dt;\quad t = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{R}.$$

Los nuevos límites de integración son:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \operatorname{arc\,sen} 0 = 0, \\ x = R \rightarrow t = \operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Así pues, se tiene:

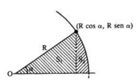
$$S = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 t}\, R \cos t \, dt = 4 R^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt = 4 R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt;$$

$$S = 4 R^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = 2 R^2 t + R^2 \operatorname{sen} 2t \Big]_0^{\pi/2} = (\pi R^2 + 0) - (0 + 0) = \pi R^2 \text{ u}^2.$$

17. Hallar el área de un sector circular de radio R y ángulo α.

Se considera la circunferencia centrada de radio R de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$.

Sea α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, un ángulo en el primer cuadrante.



El área del sector circular de ángulo central α se descompone como suma de las áreas de dos recintos: $S = S_1 + S_2$ (véase la figura adjunta).

S_1 es el área de un triángulo de base $b = R \cos \alpha$ y altura $h = R \operatorname{sen} \alpha$.

$$S_1 = \int_0^{R \cos \alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} x \, dx = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \frac{x^2}{2} \Big]_0^{R \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{2} - 0;$$

$$S_1 = \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{R^2}{4} \operatorname{sen} 2\alpha \text{ u}^2.$$

S_2 viene dado por la integral $S_2 = \displaystyle\int_{R \cos \alpha}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$.

Para calcular esta integral se hace el cambio de variable $x = R \cos t \rightarrow dx = -R \operatorname{sen} t \, dt$.

Los nuevos límites de integración son: $\left\{ \begin{array}{l} x = R \rightarrow \cos t = 1 \rightarrow t = 0, \\ x = R \cos \alpha \rightarrow \cos t = \cos \alpha \rightarrow t = \alpha, \end{array} \right.$ resultando:

$$S_2 = \int_{R \cos \alpha}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \int_\alpha^0 \sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 t}\, (-R \operatorname{sen} t)\, dt = -R^2 \int_\alpha^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} \operatorname{sen} t \, dt;$$

$$S_2 = R^2 \int_0^\alpha \operatorname{sen}^2 t \, dt = R^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right) \Big]_0^\alpha;$$

$$S_2 = \left(\frac{R^2 \alpha}{2} - \frac{R^2}{4} \operatorname{sen} 2\alpha \right) - 0 = \left(\frac{R^2 \alpha}{2} - \frac{R^2}{4} \operatorname{sen} 2\alpha \right) \text{u}^2.$$

Así pues, el área del sector circular de ángulo central α resulta:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{R^2}{4} \operatorname{sen} 2\alpha + \frac{R^2 \alpha}{2} - \frac{R^2}{4} \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{R^2 \alpha}{2} \text{ u}^2.$$

Nota 1: Se ha calculado el área de un sector circular de un ángulo central en el primer cuadrante. Para generalizar el resultado para un ángulo central cualquiera debe hacerse el siguiente razonamiento:

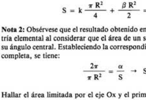
Sea α un ángulo cualquiera ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$); α se descompone como $\alpha = k\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta$, donde $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ y β es un ángulo es en el primer cuadrante; entonces, conocido que el área de un cuadrante de círculo es $\frac{\pi R^2}{4}$, se tiene:

$$S = k\frac{\pi R^2}{4} + \frac{\beta R^2}{2} = \frac{R^2\left(k\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{2} = \frac{R^2 \alpha}{2} u^2.$$

Nota 2: Obsérvese que el resultado obtenido en este ejercicio coincide con el que se obtiene en geometría elemental al considerar que el área de un sector circular es directamente proporcional al valor de su ángulo central. Estableciendo la correspondiente proporción, tomando como base la circunferencia completa, se tiene:

$$\frac{2\pi}{\pi R^2} = \frac{\alpha}{S} \rightarrow S = \frac{\alpha \pi R^2}{2\pi} = \frac{\alpha R^2}{2} u^2.$$

18. Hallar el área limitada por el eje Ox y el primer arco de $y = e^{-ax}$ sen ax.



Se estudian los ceros de la función:

$$y = e^{-ax} \text{ sen ax} = 0 \rightarrow \text{sen ax} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow ax = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{a}, \text{ para } k \in Z.$$

Por consiguiente, el primer arco de la función se corresponde con el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{a}\right]$. Así pues, el área pedida viene dada por la integral:

$$S = \int_0^{\pi/a} e^{-ax} \text{ sen ax dx}.$$

Previamente se calcula la correspondiente integral indefinida.

Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = e^{-ax} \rightarrow du = -a\, e^{-ax}\, dx, \\ dv = \text{sen ax dx} \rightarrow v = -\frac{1}{a} \cos ax, \end{cases}$ resulta:

$$I = \int e^{-ax} \text{ sen ax} = -\frac{1}{a} \cos ax\, e^{-ax} - \int e^{-ax} \cos ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax\, e^{-ax} - I_1.$$

La integral I_1 se calcula integrando de nuevo por partes, haciendo

$\begin{cases} u = e^{-ax} \rightarrow du = -a\, e^{ax}\, dx, \\ dv = \cos ax\, dx \rightarrow v = \frac{1}{a} \text{ sen ax}, \end{cases}$ se tiene:

$$I_1 = \int e^{-ax} \cos ax\, dx = \frac{1}{a} e^{-ax} \text{ sen ax} + \int e^{ax} \text{ sen ax dx} = \frac{1}{a} e^{-ax} \text{ sen ax} + I.$$

Sustituyendo el valor de I_1 en I, se deduce:

$$I = -\frac{1}{a} \cos ax\, e^{-ax} - \frac{1}{a} e^{-ax} \text{ sen ax} - I \rightarrow$$

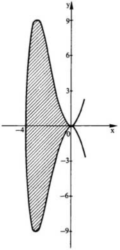
$$\rightarrow 2I = -\frac{1}{a} e^{-ax} (\cos ax + \text{sen ax}) = -\frac{1}{2a} e^{-ax} (\cos ax + \text{sen ax}).$$

Por consiguiente, el área pedida es:

$$S = \int_0^{\pi/a} e^{-ax} \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax} (\cos ax + \operatorname{sen} ax) \Big]_0^{\pi/a};$$

$$S = \left(-\frac{1}{2a} e^{-\pi} (-1 + 0) \right) - \left(-\frac{1}{2a} \cdot 1 \, (1 - 0) \right) = \frac{1}{2a} e^{-\pi} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a} (e^{-\pi} + 1) \, u^2.$$

19. Calcular el área encerrada por $y^2 = x^4(4 + x)$. (Cambio: $4 + x = t^2$.)



Se determinan los puntos de corte de la curva con el eje Ox:

$$y = 0 \rightarrow y^2 = x^4(4 + x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = 4 \text{ y } x_2 = 0$$

Como la curva dada es simétrica respecto al eje de abscisas, el área pedida viene dada por el duplo del área limitada por la función $y = x^2 \sqrt{4 + x}$ y el eje Ox en el intervalo $[-4, 0]$; es decir,

$$S = 2 \int_{-4}^{0} x^2 \sqrt{4 + x} \, dx.$$

Se hace el cambio de variable $t^2 = 4 + x \rightarrow$

$$\rightarrow x = t^2 - 4, \; dx = 2t \, dt.$$

Los nuevos límites de integración son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 \rightarrow t = 0, \\ x = 0 \rightarrow t = 2, \end{array} \right. \text{ y se tiene que:}$$

$$S = 2 \int_0^2 (t^2 - 4)^2 \, t \, (2t \, dt) = 4 \int_0^2 t^2 (t^2 - 4) \, dt = 4 \int_0^2 (t^6 - 8t^4 + 16t^2) \, dt;$$

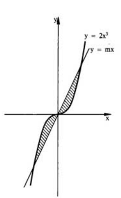
$$S = 4 \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{8}{5} t^5 + \frac{16}{3} t^3 \right) \Big]_0^2 = 4 \left(\frac{128}{7} - \frac{256}{5} + \frac{128}{3} \right) - 0 = \frac{4\,096}{105} \, u^2.$$

20. Determinar el valor de m para que el área del recinto limitado por $y = 2x^3$ e $y = mx$ sea 64 unidades cuadradas.

(Propuesto en la Univ. de Valencia.)

En primer lugar se determinan los puntos de corte de la recta $y = mx$ y la cúbica $y = 2x^3$, para lo cual se resuelve la ecuación:

$$mx = 2x^3 \rightarrow x(2x^2 - m) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{\frac{m}{2}} \text{ y } x_3 = \sqrt{\frac{m}{2}}.$$



Teniendo en cuenta que ambas curvas son simétricas respecto al origen, el área pedida resulta:

$$S = 2\int_0^{\sqrt{\frac{m}{2}}} (mx - 2x^3)\, dx;$$

$$S = 2\left(\frac{m}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4\right)\Big]_0^{\sqrt{\frac{m}{2}}};$$

$$S = 2\left(\frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{8}\right) - 2\,(0 - 0) = \frac{m^2}{4}\ u^2.$$

Si se impone la condición que establece el problema, resulta:

$$S = 64\ u^2 \rightarrow \frac{m^2}{4} = 64 \rightarrow$$

$$\rightarrow m^2 = 64 \cdot 4 \rightarrow m = 16.$$

21. Demostrar que no tienen sentido las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$. *b)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

a) La función $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ presenta una discontinuidad de segunda especie para $x = 1$; por tanto, la función no está acotada en el intervalo de integración $[0, 4]$. Así pues, se trata de una integral impropia.

$$I = \int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{b \to 1^+} \int_b^4 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

La integral I está definida si existen (son finitos) ambos límites.

Teniendo en cuenta que $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + K$, resulta que:

$$I = \lim_{a \to 1^-} -\frac{1}{x-1}\Big]_0^a + \lim_{b \to 1^+} -\frac{1}{x-1}\Big]_b^4;$$

$$I = \lim_{a \to 1^-}\left(-\frac{1}{a-1} + 0\right) + \lim_{b \to 1^+}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{b-1}\right).$$

Como ambos límites no existen, la integral I es una integral impropia divergente.

b) Se trata de la integral impropia de una función continua con un límite de integración infinito; por tanto, la integral viene dada por el límite:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big]_1^a = (\lim_{a \to +\infty} 2\sqrt{x}) - 1.$$

Como el límite no converge, la integral I es una integral impropia divergente.

Nota: Se tienen con carácter general los siguientes resultados sobre convergencia de integrales impropias de funciones potenciales

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} \rightarrow \begin{cases} \text{converge, si } n < 1, \text{ y vale } I = \dfrac{(b-a)^{-n+1}}{1-n}; \\ \text{diverge, si } n \geq 1. \end{cases}$$

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \rightarrow \begin{cases} \text{converge, si } n > 1, \text{ y vale } I = \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{a^{n-1}}, \text{ (siendo } a > 0); \\ \text{diverge, si } n \leq 1. \end{cases}$$

22. Hallar las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$. *b)* $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}}$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$. *d)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$.

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$. *f)* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$; $(n > 1)$, $(a > 0)$.

a) $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x \Big]_0^a;$

$$I = \left(\lim_{a \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} a \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

b) Teniendo en cuenta que la función integrando presenta una discontinuidad de segunda especie para $x = 1$, resulta:

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}} = \lim_{a \to 1^+} \int_a^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-1}} = \lim_{a \to 1^+} \frac{4}{3} \sqrt[4]{(x-1)^3} \Big]_a^4;$$

$$S = \frac{4\sqrt[4]{27}}{3} - \lim_{a \to 1^+} \frac{4}{3} \sqrt[4]{(a-1)^3} = \frac{4\sqrt[4]{27}}{3} - 0 = \frac{4\sqrt[4]{27}}{3} = 3{,}0393.$$

c) $\displaystyle I = \int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^{2x}\, dx = \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2x} \Big]_a^0;$

$$I = \frac{1}{2} e^0 - \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2a} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

d) Previamente se calcula la correspondiente integral indefinida (consúltese el ejercicio **18** de este mismo tema), resultando:

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) + K.$$

Así pues, se tiene:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx = \lim_{a \to +\infty} -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x) \Big]_0^a;$$

$$I = \left(\lim_{a \to +\infty} -\frac{e^{-a}}{2} (\cos a + \operatorname{sen} a) \right) - \left(-\frac{e^{0}}{2} (\cos 0 + \operatorname{sen} 0) \right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

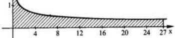
Para calcular el límite anterior obsérvese que, para cualquier valor de a, (cos a + sen a) es una cantidad acotada, y que $\frac{e^{-a}}{2}$ tiende a cero cuando a tiende a infinito.

e) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x}\, dx = \lim_{a \to +\infty} -e^{-x} \Big]_0^a = \left(\lim_{a \to +\infty} -e^{-a} \right) - (-e^{-0}) = 0 + 1 = 1.$

f) $I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^n} = \lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \Big]_a^b;$

$$I = \left(\lim_{b \to +\infty} -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{b^{n-1}} \right) - \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} \right) = 0 + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{a^{n-1}}.$$

23. Hallar el área limitada por los ejes coordenados e $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $(0 < x \leq 27)$.



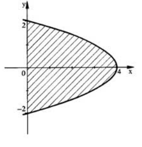
(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Teniendo en cuenta que la función $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ presenta una discontinuidad de segunda especie para x = 0, el área pedida viene dada por la integral impropia:

$$S = \int_0^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_0^{27} x^{-1/3}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big]_a^{27};$$

$$S = \frac{3}{2} 27^{2/3} - \lim_{a \to 0^+} \frac{3}{2} a^{2/3} = \frac{27}{2} - 0 = \frac{27}{2}\, u^2.$$

24. Calcular el área limitada por $x = 4 - y^2$ y el eje Oy.



Se determinan los puntos de corte de la curva $x = 4 - y^2$ con el eje Oy, resolviendo la ecuación:

$$x = 0 = 4 - y^2 \rightarrow y_1 = -2 \text{ e } y_2 = 2.$$

El área pedida viene dada por la integral:

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 4y - \frac{y^3}{3} \Big]_{-2}^{2};$$

$$S = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}\, u^2.$$

25. Hallar el área encerrada por $y = 4x + 1$ e $y^2 + 2y + x - 3 = 0$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Para una mayor comodidad se considera la variable x como función de la variable y, de modo que se busca el área encerrada por las funciones

$$x = \frac{y-1}{4} \text{ y } x = -y^2 - 2y + 3.$$

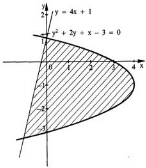
Se calculan las ordenadas de los puntos comunes a ambas curvas:

$$\frac{y-1}{4} = -y^2 - 2y + 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow -4y^2 - 9y + 13 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 52}}{-8} = -\frac{9 \pm 17}{8} \rightarrow$$

$$\rightarrow y_1 = -\frac{13}{4} \text{ e } y_2 = 1.$$



El área pedida vendrá dada por la integral:

$$S = \int_{-13/4}^{1} \left[(-y^2 - 2y + 3) - \left(\frac{y-1}{4} \right) \right] dy = \frac{1}{4} \int_{-13/4}^{1} (-4y^2 - 9y + 13)\, dy;$$

$$S = \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{3} y^3 - \frac{9}{2} y^2 + 13y \right) \Big]_{-13/4}^{1};$$

$$S = \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{3} - \frac{9}{2} + 13 \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{2\,197}{48} - \frac{1\,521}{32} - \frac{169}{4} \right);$$

$$S = \frac{43}{24} - \left(-\frac{4\,225}{384} \right) = \frac{4\,913}{384} \text{ u}^2.$$

26. Calcular $I = \int_3^6 x\, y\, dx$, siendo $x = 6 \cos t$ e $y = 2 \operatorname{sen} t$.

Teniendo en cuenta que $x = 6 \cos t \rightarrow dx = -6 \operatorname{sen} t\, dt$, y que

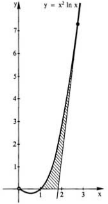
$$\begin{cases} x = 3 \rightarrow \cos t = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}, \\ x = 6 \rightarrow \cos t = \dfrac{6}{6} = 1 \rightarrow t = 0, \end{cases}$$

resulta:

$$I = \int_3^6 x\, y\, dx = \int_{\pi/3}^{0} (6 \cos t)\, (2 \operatorname{sen} t)\, (-6 \operatorname{sen} t\, dt) = -72 \int_{\pi/3}^{0} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt;$$

$$I = -72 \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} \Big]_{\pi/3}^{0} = 24 \operatorname{sen}^3 t \Big]_0^{\pi/3} = 24 \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{3} - 24 \operatorname{sen}^3 0 = 24 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 0 = 9\sqrt{3}.$$

27. Determinar el área acotada por $f(x) = x^2 \ln x$, su tangente en el punto de abscisa e y el eje Ox.



(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Se calcula, en primer lugar, la derivada de la función $y = f(x)$:

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

La ecuación de la tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = e$ viene dada por: $y - f(e) = f'(e)(x - e)$. Sustituyendo valores y operando, resulta:

$$y - e^2 = 3e(x - e) \rightarrow y = 3ex - 2e^2.$$

Como la curva de ecuación $y = f(x) = x^2 \ln x$ corta al eje Ox para $x = 1$, se tiene que el área pedida viene dada por:

$$S = \int_1^e [(x^2 \ln x) - (3ex - 2e^2)]\, dx;$$

$$S = \int_1^e (x^2 \ln x - 3ex + 2e^2)\, dx.$$

Se calcula previamente la integral definida $\int x^2 \ln x\, dx$.

Integrando por partes, haciendo $\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx, \\ dv = x^2\, dx \rightarrow v = \dfrac{x^3}{3}, \end{cases}$ resulta:

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + K = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + K.$$

Así pues,

$$S = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) - \frac{3e}{2} x^2 + 2e^2 x \Big]_1^e;$$

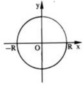
$$S = \left(\frac{e^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{3e^3}{2} + 2e^3\right) - \left(\frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{3}\right) - \frac{3e}{2} + 2e^2\right);$$

$$S = \frac{13}{18} e^3 - 2e^2 + \frac{3e}{2} + \frac{1}{9} = 3{,}9166\ u^2.$$

TEMA III-5.3. — Aplicaciones de la integral definida

Ejercicios resueltos

1. *Calcular la longitud de una circunferencia de radio* R.



La ecuación de la circunferencia de radio R y centro el origen de coordenadas es:

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}};$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

$$s = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\,dx = 2 \cdot 2\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 4\int_0^R \frac{R\,dx}{R\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.$$

$$s = 4R\int_0^R \frac{\frac{1}{R}\,dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.$$ Dado que $D\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{R}$, se tiene:

$$s = 4R \cdot \text{arc sen}\,\frac{x}{R}\Big]_0^R = 4R\left(\text{arc sen}\,\frac{R}{R} - \text{arc sen}\,0\right) = 4R\,\frac{\pi}{2} = 2\pi R \text{ u.}$$

2. *Determinar el volumen de una esfera de radio R.*

Como es sabido, una esfera se engendra al girar un círculo alrededor de un eje (por ejemplo, el Ox).

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y^2 = R^2 - x^2 \rightarrow V = \pi\int_{-R}^{+R} y^2\,dx = 2\pi\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx.$$

$$V = 2\pi\left(R^2x - \frac{1}{3}R^3\right)\Big]_0^R = 2\pi\left(R^2 \cdot R - \frac{1}{3}R^3\right) = 2\pi \cdot \frac{3R^3 - R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ u}^3.$$

3. *Hallar el volumen engendrado al girar sobre el eje* Oy *el recinto limitado por la parábola* $y = x^2 - 1$ *y la recta* $y = 3$.

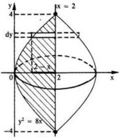
Se divide el recinto mediante franjas horizontales (ver figura adjunta). Cuando el rectángulo elemental gire alrededor del eje Oy engendrará un cilindro, de radio x y altura dy, cuyo volumen es $dV = \pi x^2\,dy$.

Como para $x = 0 \rightarrow y = -1$, los límites de integración son $y_1 = -1$ e $y_2 = 3$. Por tanto, dado que $x^2 = y + 1$:

$$V = \pi\int_{-1}^{3} x^2\,dy = \pi\int_{-1}^{3}(y + 1)\,dy.$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2}y^2 + y\right)\Big]_{-1}^{3}.$$

$$V = \pi\left(\frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1\right) = 8\pi \text{ u}^3.$$



Calcular el volumen engendrado al girar alrededor de la recta x = 2 *el recinto plano limitado por la parábola* $y^2 = 8x$.

Se divide el recinto plano dado mediante franjas horizontales, de la parábola a la recta (ver figura adjunta). Cuando el rectángulo elemental, de dimensiones $2 - x$ y dy, gire alrededor de la recta $x = 2$, se engendra un cilindro, de radio $2 - x$ y altura dy, cuyo volumen es $dV = \pi(2 - x)^2\,dy$.

Los límites de integración se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ 8x = y^2 \end{array}\right\} \rightarrow y = \sqrt{8 \cdot 2} = \left\{\begin{array}{l} y_1 = -4; \\ y_2 = +4. \end{array}\right.$$

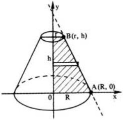
Por tanto: $V = \pi \int_{-4}^{4} (2 - x)^2\,dy$.

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{1}{8}y^2\right)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{64}y^4\right) dy = 2\pi\left(4y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{320}y^5\right)\Big]_0^4.$$

$$V = 2\pi\left(16 - \frac{32}{3} + \frac{16}{5}\right) - 0 = \frac{256}{15}\pi\ u^3.$$

5. *Determinar el volumen de un tronco de cono de radio mayor* R, *de radio menor* r *y altura* h.

El tronco de cono de la figura es engendrado al girar sobre el eje Oy el recinto plano limitado por los segmentos AB y r y los ejes coordenados.



La ecuación de la recta AB, por pasar por A(R, 0) y B(r, h), es:

$$\frac{y - 0}{h - 0} = \frac{x - R}{r - R} \rightarrow x = \frac{r - R}{h}y + R.$$

Por ser volumen de revolución alrededor del eje Oy, se tiene:

$$V = \pi \int_0^h x^2\,dy = \pi \int_0^h \left(\frac{r - R}{h}y + R\right)^2 dx.$$

$$V = \pi \int_0^h \left[\frac{(r - R)^2}{h^2}y^2 + 2R\frac{r - R}{h}y + R^2\right] dx = \pi\left[\frac{(r - R)^2}{h^2} \cdot \frac{y^3}{3} + 2R\frac{r - R}{h} \cdot \frac{y^2}{2} + R^2y\right]_0^h.$$

$$V = \pi\left[\frac{(r^2 - 2rR + R^2)}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} + R\frac{(r - R)h^2}{h} + R^2h\right].$$

$$V = \pi h\left(\frac{r^2 - 2rR + R^2}{3} + Rr - R^2 + R^2\right) = \frac{\pi}{3}h\,(R^2 + r^2 + Rr)\ u^3.$$

6. *Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación, alrededor del eje* Ox, *de la hipocicloide* $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \text{sen}^3\,t$.

$y = a \cdot \text{sen}^3\,t = 0 \rightarrow \text{sen}^3\,t = 0 \rightarrow \text{sen}\,t = 0 \rightarrow$ en el intervalo $[0, 2\pi]$: $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$.

Si la curva viene dada en ecuaciones paramétricas, el área de la superficie de revolución, generada al girar alrededor del eje Ox el arco de la curva, se expresa por:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \text{sen } t; \quad y'(t) = \frac{dy}{dt} = 3a \cdot \text{sen}^2 t \cos t.$$

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 9a^2 \cdot \cos^4 t \cdot \text{sen}^2 t + 9a^2 \cdot \text{sen}^4 t \cdot \cos^2 t = 9a^2 \cdot \text{sen}^2 t \cdot \cos^2 t.$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} (a \cdot \text{sen}^3 t) \cdot \sqrt{9a^2 \cdot \text{sen}^2 t \cdot \cos^2 t}\, dt = 4\pi \int_0^{\pi/2} a \cdot \text{sen}^3 t \cdot 3a \cdot \text{sen } t \cdot \cos t\, dt.$$

$$S = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \text{sen}^4 t \cdot (\cos t)\, dt = 12\pi a^2 \frac{1}{5} \text{sen}^5 t \Big]_0^{\pi/2} = \frac{12}{5}\pi a^2 \left(\text{sen}^5 \frac{\pi}{2} - \text{sen}^5 0 \right).$$

$$S = \frac{12}{5}\pi a^2 (1^5 - 0^5) = \frac{12}{5}\pi a^2 u^2.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Hallar la longitud de los arcos de curva de las funciones dadas, comprendidos entre los puntos cuyas abscisas se indican:

a) Parábola $y = x^2 - 2x + 3$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = -1$ y $x = +1$.

c) $24\,xy - x^4 - 48 = 0$ entre $x = 2$ y $x = 4$.

d) Parábola $x = y^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

e) $x = 3y^{3/2} - 1$ entre $y = 0$ e $y = 4$.

La longitud del arco de curva de ecuación $y = f(x)$ entre los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$ viene dada por la expresión: $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

a) En este ejercicio $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $a = 0$ y $b = 4$; por tanto, $f'(x) = 2x - 2$, $[f'(x)]^2 = 4x^2 - 8x + 4$ y resulta: $s = \int_0^4 \sqrt{4x^2 - 8x + 5}\, dx$.

Para evaluar esta integral se efectúa el siguiente cambio de variable (véase la nota al final del ejercicio): $\sqrt{4x^2 - 8x + 5} = 2x + t$; de modo que, elevando ambos miembros al cuadrado, se obtiene:

$$\sqrt{4x^2 - 8x + 5} = 2x + t \rightarrow 4x^2 - 8x + 5 = 4x^2 + 4xt + t^2 \rightarrow 4xt + 8x = 5 - t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x(t + 2) = 5 - t^2 \rightarrow x = \frac{5 - t^2}{4(t + 2)}.$$

Así pues, el integrando queda:

$$\sqrt{4x^2 - 8x + 5} = 2x + t = \frac{2(5 - t^2)}{4(t + 2)} + t = \frac{5 - t^2 + 2t(t + 2)}{2(t + 2)} = \frac{t^2 + 4t + 5}{2(t + 2)}.$$

Derivando la variable x respecto a t se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{5 - t^2}{4(t + 2)} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{-2t(t + 2) - (5 - t^2)}{(t + 2)^2} \right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{t^2 + 4t + 5}{(t + 2)^2} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{t^2 + 4t + 5}{(t + 2)^2} \right) dt.$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{4x^2 - 8x + 5} = 2x + t \rightarrow t = \sqrt{4x^2 - 8x + 5} - 2x$, los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \sqrt{5}, \\ x = 4 \rightarrow t = \sqrt{37} - 8. \end{cases}$

En definitiva, la longitud pedida viene dada por la integral:

$$s = \int_0^4 \sqrt{4x^2 - 8x + 5}\, dx = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}-8} \left(\frac{t^2 + 4t + 5}{2(t+2)} \right) \left(-\frac{1}{4} \frac{t^2 + 4t + 5}{(t+2)^2} \right) dt;$$

$$s = -\frac{1}{8} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}-8} \frac{(t^2 + 4t + 5)^2}{(t+2)^3} dt = \frac{1}{8} \int_{\sqrt{37}-8}^{\sqrt{5}} \frac{t^4 + 8t^3 + 26t^2 + 40t + 25}{t^3 + 6t^2 + 12t + 8} dt.$$

Se trata de la integral de una función racional en la que el polinomio numerador es de grado superior al del polinomio denominador. Se efectúa, en primer lugar, la división indicada en el integrando:

$$\frac{t^4 + 8t^3 + 26t^2 + 40t + 25}{t^3 + 6t^2 + 12t + 8} = t + 2 + \frac{2t^2 + 8t + 9}{(t+2)^3}.$$

A continuación, se descompone el sumando correspondiente al resto de la división como suma de fracciones elementales:

$$\frac{2t^2 + 8t + 9}{(t+2)^3} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{C}{(t+2)^3} = \frac{A(t+2)^2 + B(t+2) + C}{(t+2)^3} =$$

$$= \frac{At^2 + (4A + B)t + (4A + 2B + C)}{(t+2)^3} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ 4A + B = 8 \\ 4A + 2B + C = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 0, \\ C = 1. \end{cases}$$

Por consiguiente, la integral resulta:

$$s = \frac{1}{8} \int_{\sqrt{37}-8}^{\sqrt{5}} \left(t + 2 + \frac{2}{t+2} + \frac{1}{(t+2)^3} \right) dt;$$

$$s = \frac{1}{8} \left(\frac{t^2}{2} + 2t + 2 \ln |t + 2| - \frac{1}{2(t+2)^2} \right) \Bigg]_{\sqrt{37}-8}^{\sqrt{5}};$$

$$s = \frac{1}{8} \Bigg[\left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{5} + 2 \ln (\sqrt{5} + 2) - \frac{1}{2(\sqrt{5}+2)^2} \right) -$$

$$- \left(\frac{(\sqrt{37} - 8)^2}{2} + 2(\sqrt{37} - 8) + 2 \ln (\sqrt{37} - 6) - \frac{1}{2(\sqrt{37} - 6)^2} \right) \Bigg];$$

$$s = \frac{1}{8} (9{,}8315 + 79{,}9767) = 11{,}2260 \text{ u.}$$

b) En este ejercicio $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\, x$ (consúltese la **nota 2ª** del ejercicio 9 *d)* del tema III-2.2), $a = -1$ y $b = 1$, de modo que $f'(x) = \text{sh}\, x$, y resulta que:

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \text{sh}^2 x}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\text{ch}^2 x}\, dx = \int_{-1}^{1} \text{ch}\, x = \text{sh}\, x \Big]_{-1}^{1} = \text{sh}\, 1 - \text{sh}\, (-1);$$

$$s = \text{sh}\, 1 - \text{sh}\, (-1) = \frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1} - e}{2} = e - \frac{1}{e} = 2{,}3504 \text{ u.}$$

c) Despejando la variable y en la expresión $24\,xy - x^4 - 48 = 0$ se obtiene la ecuación explícita de la curva: $y = f(x) = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$, de modo que:

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot 24x - 24(x^4 + 48)}{24^2\,x^2} = \frac{3x^4 - 48}{24x^2} = \frac{x^4 - 16}{8x^2}.$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2 = 1 + \frac{x^8 - 32x^4 + 256}{64x^4} = \frac{x^8 + 32x^4 + 256}{64x^4} = \left(\frac{x^4 + 16}{8x^2}\right)^2.$$

Por tanto, la longitud pedida viene dada por:

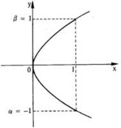
$$s = \int_2^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{x^4 + 16}{8x^2}\right)^2}\,dx;$$

$$s = \int_2^4 \frac{x^4 + 16}{8x^2}\,dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{8}x^2 + 2x^{-2}\right)dx;$$

$$s = \left.\frac{x^3}{24} - \frac{2}{x}\right]_2^4 = \left(\frac{64}{24} - \frac{2}{4}\right) - \left(\frac{8}{24} - \frac{2}{2}\right) = \frac{13}{6} - \frac{2}{3} = \frac{17}{6}\text{ u.}$$

d) La longitud del arco de curva de ecuación $x = F(y)$ comprendido entre los puntos de ordenadas $y = \alpha$ e $y = \beta$, viene dada por: $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + [F'(y)]^2}\,dy$.

En el caso planteado en este ejercicio $x = F(y) = y^2 \rightarrow F'(y) = 2y$; $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, ya que cuando la variable x varía de $x = 0$ a $x = 1$ la variable y recorre el intervalo $[-1, 1]$ como puede verse en la gráfica adjunta.



Así pues, la longitud pedida es:

$$s = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (2y)^2}\,dy = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4y^2}\,dy.$$

Para evaluar esta integral se realiza el siguiente cambio de variable (véase la nota al final de este ejercicio): $\sqrt{1 + 4y^2} = 2y + t$, de manera que elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene:

$$\sqrt{1 + 4y^2} = 2y + t \rightarrow 1 + 4y^2 = 4y^2 + 4yt + t^2 \rightarrow y = \frac{1 - t^2}{4t}.$$

Y, por tanto, resulta:

$$\sqrt{1 + 4y^2} = 2y + t = \frac{2(1 - t^2)}{4t} + t = \frac{1 - t^2}{2t} + t = \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Derivando la variable y respecto a t se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - t^2}{4t}\right) = \frac{(-2t)(4t) - 4(1 - t^2)}{4^2\,t^2} = -\frac{t^2 + 1}{4t^2} \rightarrow dy = -\frac{t^2 + 1}{4t^2}\,dt.$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt{1 + 4y^2} = 2y + t \rightarrow t = \sqrt{1 + 4y^2} - 2y$, los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} y = -1 \rightarrow t = \sqrt{5} + 2, \\ y = 1 \rightarrow t = \sqrt{5} - 2. \end{cases}$

En definitiva, la longitud pedida resulta:

$$s = \int_{\sqrt{5}+2}^{\sqrt{5}-2} \left(\frac{t^2+1}{2t} \right) \left(-\frac{t^2+1}{4t^2} \right) dt = -\frac{1}{8} \int_{\sqrt{5}+2}^{\sqrt{5}-2} \frac{(t^2+1)^2}{t^3} dt;$$

$$s = \frac{1}{8} \int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2} \frac{t^4+2t^2+1}{t^3} dt;$$

$$s = \int_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \ln |t| - \frac{1}{2t^2} \right) \Big]_{\sqrt{5}-2}^{\sqrt{5}+2};$$

$$s = \frac{1}{8} \left[\left(\frac{(\sqrt{5}+2)^2}{2} + 2 \ln (\sqrt{5}+2) - \frac{1}{2(\sqrt{5}+2)^2} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{2} + 2 \ln (\sqrt{5}-2) - \frac{1}{2(\sqrt{5}-2)^2} \right) \right];$$

$$s = \frac{1}{8} (11{,}8315 + 11{,}8315) = 2{,}9579 \text{ u.}$$

e) De manera análoga al apartado anterior se tiene que $F(y) = 3y^{3/2} - 1$, $\alpha = 0$ y $\beta = 4$, de modo que $F'(y) = \frac{9}{2} y^{1/2} \rightarrow [F'(y)]^2 = \frac{81}{4} y$; por tanto:

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4} y}\, dy = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 81y}\, dy.$$

Para calcular esta integral se hace el cambio de variable $t = 4 + 81y \rightarrow y = \frac{t-4}{81}$, $dy = \frac{1}{81} dt$.

Los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} y = 0 \rightarrow t = 4, \\ y = 4 \rightarrow t = 328. \end{cases}$

En definitiva, la longitud pedida viene dada por la integral:

$$s = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 81y}\, dy = \frac{1}{2} \int_4^{328} \sqrt{t} \left(\frac{1}{81} dt \right) = \frac{1}{162} \int_4^{328} t^{1/2} dt;$$

$$s = \frac{1}{162} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big]_4^{328} = \frac{1}{243} (\sqrt{328^3} - \sqrt{4^3}) = \frac{1}{243} (5\,940{,}3327 - 8) = 24{,}4129 \text{ u.}$$

Nota: Las integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$, donde R es una función racional se pueden reducir a integrales de tipo racional mediante alguno de los siguientes cambios de variable, que reciben el nombre de *sustituciones de Euler:*

1) Si $a > 0$, se puede hacer: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\, x + t$.

2) Si $c > 0$, se puede hacer: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t\, x + \sqrt{c}$.

3) Si el trinomio $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces reales p y q, de modo que $ax^2 + bx + c = a(x-p)(x-q)$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-p)$.

2. Calcular la longitud de la catenaria $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ entre $x = 0$ y $x = a$.

La función $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, que representa la curva *catenaria*, puede escribirse utilizando funciones hiperbólicas de la siguiente forma (véase la **nota 2ª** del ejercicio 9 *d)* del tema III-2.2):

$$y = f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a} \rightarrow f'(x) = \operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

Así pues, la longitud del arco de catenaria pedida es:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\, dx = \int_0^a \sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}\, dx = \int_0^a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = a \operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big]_0^a;$$

$$s = a(\operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh} 0) = a\left(\frac{e - e^{-1}}{2} - \frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right) = \frac{a}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = 1{,}7520a \text{ u.}$$

3. Calcular la longitud del arco de curva de ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$, correspondientes a los valores de los parámetros entre 0 y 1.

(Propuesto en la Univ. de Salamanca.)

La longitud del arco de la curva de ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ comprendido entre los puntos correspondientes a los valores del parámetro t_1 y t_2 viene dada por la expresión:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

En el caso planteado en este ejercicio $x(t) = t^2 \rightarrow x'(t) = 2t$; $y(t) = t^3 \rightarrow y'(t) = 3t^2$; $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$, de modo que la longitud de arco pedida es:

$$s = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt.$$

Para evaluar esta integral se hace el cambio de variable $u = 4 + 9t^2 \rightarrow du = 18t\, dx$.

Los nuevos límites de integración son: $\left\{\begin{array}{l} t = 0 \rightarrow u = 4, \\ t = 1 \rightarrow u = 13. \end{array}\right.$ Así pues, resulta:

$$s = \frac{1}{18}\int_4^{13} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_4^{13} = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8) = 1{,}43971 \text{ u.}$$

Nota: Otra forma de hacer este ejercicio es expresar la variable y como función explícita de la variable x, eliminando el parámetro t en las ecuaciones x(t) e y(t).

$$\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \rightarrow t = \sqrt{x} \\ y = t^3 \rightarrow t = \sqrt[3]{y} \end{array}\right. \rightarrow \sqrt{x} = \sqrt[3]{y} \rightarrow y = \sqrt{x^3} = x^{3/2}.$$

Una vez descrita la curva por la ecuación $y = f(x) = x^{3/2}$, la longitud de arco viene dada por la fórmula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

En el caso planteado en este ejercicio: $f(x) = x^{3/2} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$; $a = x(0) = 0$ y $b = x(1) = 1$, de modo que la longitud pedida viene dada por:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4 + 9x}\, dx.$$

Para calcular el valor de esta integral se hace el cambio de variable $4 + 9x = t \rightarrow dx = \frac{1}{9}dt$.

Los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 4, \\ x = 1 \rightarrow t = 13. \end{cases}$ Así pues, resulta:

$$s = \frac{1}{2}\int_4^{13} \sqrt{t}\left(\frac{1}{9}dt\right) = \frac{1}{18}\int_4^{13}\sqrt{t}\, dt = \frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}t^{2/3}\Big]_4^{13} = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8) = 1{,}43971 \text{ u.}$$

4. Comprobar que la longitud en el primer cuadrante de la hipocicloide $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \operatorname{sen}^3 t$ es igual a $\frac{3}{2}a$.

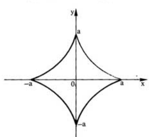
La longitud del arco de la curva de ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ comprendido entre los puntos correspondientes a los valores del parámetro t_1 y t_2 viene dada por la expresión:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(x)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Para el caso planteado en este ejercicio se tiene:

$$x(t) = a \cdot \cos^3 t \rightarrow x'(t) = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t \rightarrow [x'(t)]^2 = 9a^2 \cdot \cos^4 t \cdot \operatorname{sen}^2 t.$$

$$y(t) = a \cdot \operatorname{sen}^3 t \rightarrow y'(t) = 3a \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t \rightarrow [y'(t)]^2 = 9a^2 \cdot \operatorname{sen}^4 t \cdot \cos^2 t.$$



HIPOCICLOIDE: $\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos^3 t. \\ y(t) = a \cdot \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$

Por tanto, resulta que:

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 =$$
$$= 9a^2 \cdot \cos^4 t \cdot \operatorname{sen}^2 t + 9a^2 \cdot \operatorname{sen}^4 t \cdot \cos^2 t =$$
$$= 9a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos^2 t \cdot (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) =$$
$$= 9a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos^2 t = (3a \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos t)^2;$$

y, por consiguiente,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + (y'(t)]^2} = 3a \cdot \operatorname{sen} t \cdot \cos t =$$
$$= \frac{3a}{2} \cdot \operatorname{sen} 2t.$$

Teniendo en cuenta que los límites de integración en la integral que define la longitud s son en este caso $t_1 = 0$ y $t_2 = \frac{\pi}{2}$, se obtiene:

$$s = \int_0^{\pi/2} \frac{3a}{2} \cdot \operatorname{sen} 2t\, dt = -\frac{3a}{4} \cdot \cos 2t \Big]_0^{\pi/2};$$

$$s = -\frac{3a}{4}(\cos \pi - \cos 0) = -\frac{3a}{4}(-1 - 1) = \frac{3a}{2} \text{ u.}$$

5. Hallar el área entre $x = 0$ y $x = \pi$ de la superficie de revolución engendrada al girar alrededor del eje Ox la curva $y = \operatorname{sen} x$.

El área de la superficie engendrada por la rotación del arco de curva de ecuación $y = f(x)$ alrededor del eje Ox entre las abscisas $x = a$ y $x = b$ viene dada por la expresión:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

En el caso planteado en este ejercicio se tiene: $f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'(x) = \cos x$; $a = 0$ y $b = \pi$; de modo que resulta: $S = 2\pi \int_0^\pi \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$.

Para evaluar esta integral se hace el cambio de variable $t = \cos x \rightarrow x = \operatorname{arc} \cos t \rightarrow dx = = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$.

Los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1, \\ x = \pi \rightarrow t = -1, \end{cases}$ resultando:

$$S = 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 - t^2}\sqrt{1 + t^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\right) dt = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

Se hace un nuevo cambio de variable:

$$\sqrt{1 + t^2} = t + u \rightarrow 1 + t^2 = t^2 + 2t\,u + u^2 \rightarrow t = \frac{1 - u^2}{2u}.$$

Por consiguiente, el integrando resulta: $\sqrt{1 + t^2} = t + u = \dfrac{1 - u^2}{2u} + u = \dfrac{u^2 + 1}{2u}$; y la diferencial:

$$\frac{dt}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{1 - u^2}{2u}\right) = -\frac{u^2 + 1}{2u^2} \rightarrow dt = \left(-\frac{u^2 + 1}{2u^2}\right) du.$$

Los nuevos límites de integración, teniendo en cuenta que $u = \sqrt{1 + t^2} - t$, son:

$\begin{cases} t = 1 \rightarrow u = \sqrt{2} - 1, \\ t = -1 \rightarrow u = \sqrt{2} + 1. \end{cases}$ Así pues, resulta:

$$S = -2\pi \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(\frac{u^2 + 1}{2u}\right)\left(-\frac{u^2 + 1}{2u^2}\right) du = \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{u^4 + 2u^2 + 1}{u^3}\, du;$$

$$S = \frac{\pi}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left(u + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3}\right) du = \frac{\pi}{2}\left(\frac{u^2}{2} + 2 \ln |u| - \frac{1}{2u^2}\right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1};$$

$$S = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2} + 2 \ln (\sqrt{2} + 1) - \frac{1}{2(\sqrt{2} + 1)^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2} + 2 \ln (\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)^2}\right)\right];$$

$$S = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2} - \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}\right) + (2\ln(\sqrt{2}+1) - 2\ln(\sqrt{2}-1)) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)^2} - \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)^2}\right)\right];$$

$$S = \frac{\pi}{2}(2\sqrt{2} + 4\ln(\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{2}) = 2\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)] = 14{,}42360\ u^2.$$

6. Ídem de la curva $y = e^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

Como en el ejercicio anterior, el área pedida viene dada por la expresión:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

En este caso $f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = -e^{-x} \rightarrow [f'(x)]^2 = -e^{-2x}$; $a = 0$ y $b = 1$; por tanto, se tiene que: $S = 2\pi \int_0^1 e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}\,dx$.

Se hace el cambio de variable: $t = e^{-x} \rightarrow x = -\ln t \rightarrow dx = -\frac{1}{t}\,dt$.

Los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1, \\ x = 1 \rightarrow t = \dfrac{1}{e}. \end{cases}$ Por consiguiente,

$$S = 2\pi \int_1^{1/e} t\sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{t}\right)dt = -2\pi \int_1^{1/e} \sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Para evaluar esta integral se hace un nuevo cambio de variable: $\sqrt{1+t^2} = u + t$.

Procediendo como en el ejercicio anterior se obtiene que $\sqrt{1+t^2} = \dfrac{u^2+1}{2u}$ y $dt = \left(-\dfrac{u^2+1}{2u^2}\right)du$.

Los nuevos límites de integración, teniendo en cuenta que $u = \sqrt{1+t^2} - t$, son:

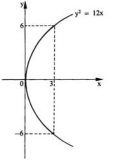
$\begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow u_1 = \sqrt{2} - 1, \\ t_2 = \dfrac{1}{e} \rightarrow u_2 = \sqrt{1 + e^{-2}} - e^{-1}. \end{cases}$ Así pues, resulta:

$$S = -2\pi \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{u^2+1}{2u}\right)\left(-\frac{u^2+1}{2u^2}\right)du = \frac{\pi}{2}\int_{u_1}^{u_2} \frac{u^4 + 2u^2 + 1}{u^3}\,dt;$$

$$S = \frac{\pi}{2}\int_{u_1}^{u_2}\left(u + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3}\right)du;$$

$$S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{u^2}{2} + 2\ln|u| - \frac{1}{2u^2}\right)\Bigg]_{u_1}^{u_2} = \frac{\pi}{2}(-1{,}5041 + 4{,}5912) = 4{,}8492\ u^2.$$

7. Ídem de la parábola $y^2 = 12x$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.



Representando gráficamente la curva de ecuación $y^2 = 12x$ (figura adjunta) se observa que, debido a la simetría de la curva respecto al eje Ox, la superficie de revolución que se engendra al girar la curva alrededor de dicho eje es igual a la que se engendra al girar en torno al eje de abscisas la rama positiva de la curva representada por la función $y = \sqrt{12x}$. Así pues, el área pedida vendrá dada por la expresión

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

En el caso planteado,

$$f(x) = \sqrt{12x} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{12x}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; [f'(x)]^2 = \frac{1}{48x};\ a = 0 \text{ y } b = 3, \text{ resultando:}$$

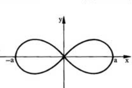
$$S = 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x}\sqrt{1 + \frac{1}{48x}}\,dx = 2\pi \int_0^3 \frac{\sqrt{12x}\,\sqrt{48x+1}}{\sqrt{48x}}\,dx = \pi \int_0^3 \sqrt{48x+1}\,dx.$$

Para calcular esta integral se hace el cambio de variable: $u = 48x + 1 \rightarrow du = 48\,dx$.

Los nuevos límites de integración son: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow u = 1, \\ x = 3 \rightarrow u = 145. \end{array} \right.$ Así pues, se tiene:

$$S = \frac{\pi}{48}\int_1^{145} \sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{48}\cdot\frac{3}{2}\,u^{2/3}\Big]_1^{145} = \frac{\pi}{32}\,(145\sqrt{145} - 1) = 171{,}3180\ u^2.$$

8. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada al girar alrededor del eje Ox el arco de curva de ecuación $a^2x^2 - x^4 = 8a^2y^2$, en un lazo $[0, a]$.



$a^2x^2 - x^4 = 8a^2y^2$

Despejando la variable y en la fórmula implícita $a^2x^2 - x^4 = 8a^2y^2$, resulta que el arco de curva al que se refiere este ejercicio está descrito por la función explícita $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8}\,a}\,x\sqrt{a^2 - x^2}$, para $x \in [0, a]$. Por consiguiente, resulta que el área pedida viene dada por la expresión:

$$S = 2\pi \int_0^a f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Derivando implícitamente respecto de x en la ecuación $a^2x^2 - x^4 = 8a^2y^2$, resulta:

$$2a^2x^2 - 4x^3 = 16a^2yy' \;\rightarrow\; y' = \frac{x(a^2 - 2x^2)}{8a^2\,y}.$$

Por tanto, se tiene que:

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{x^2(a^2 - 2x^2)^2}{64a^4 y^2} = 1 + \frac{x^2(a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2x^2 - x^4)} = 1 + \frac{(a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)};$$

$$1 + [f'(x)]^2 = \frac{8a^4 - 8a^2x^2 + a^4 + 4x^4 - 4a^2x^2}{8a^2(a^2 - x^2)} = \frac{9a^4 - 12a^2x^2 + 4x^4}{8a^2(a^2 - x^2)} = \frac{(3a^2 - 2x^2)^2}{8a^2(a^2 - x^2)}.$$

$$f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{8}\,a} \cdot \frac{3a^2 - 2x^2}{\sqrt{8}\,a\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x(3a^2 - 2x^2)}{8\,a^2}.$$

Así pues, el área pedida es:

$$S = 2\pi \int_0^a \frac{x(3a^2 - 2x^2)}{8a^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^2}\int_0^a (3a^2x - 2x^3)\,dx;$$

$$S = \frac{\pi}{4a^2}\left(\frac{3a^2}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big]_0^a = \frac{\pi}{4a^2}\left[\left(\frac{3}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^4\right) - (0 - 0)\right] = \frac{1}{4}\pi a^2 u^2.$$

9. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada en la rotación alrededor del eje Ox de una elipse de semiejes a y b.

La elipse centrada de semiejes a y b (supondremos que $b < a$) viene descrita por la ecuación

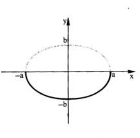
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow y' = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Por tanto, se tiene que:

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2(a^2 - x^2)}.$$

Llamando $\epsilon^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} > 0$, la expresión anterior queda:

$$1 + (y')^2 = \frac{a^2 - \epsilon^2x^2}{a^2 - x^2} \rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{\sqrt{a^2 - \epsilon^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$



La superficie del elipsoide vendrá dada, teniendo en cuenta la simetría de la figura, por

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx;$$

$$S = 4\pi \int_0^a y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores hallados antes, resulta:

$$S = 4\pi = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{\sqrt{a^2 - \epsilon^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx;$$

$$S = \frac{4\pi b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - \epsilon^2x^2}\,dx = 4\pi b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{a^2}x^2}\,dx.$$

Para evaluar esta integral se calcula previamente la integral indefinida $I = \int \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{a^2} x^2}\, dx$,

para lo cual se hace el cambio de variable $\operatorname{sen} u = \frac{\epsilon}{a} x \rightarrow x = \frac{a}{\epsilon} \operatorname{sen} u \rightarrow dx = \frac{a}{\epsilon} \cos u\, du$, resultando:

$$I = \int \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{a^2} x^2}\, dx = \frac{a}{\epsilon} \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} \cos u\, du = \frac{a}{\epsilon} \int \cos^2 u\, du;$$

$$I = \frac{a}{\epsilon} \left(\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} \right) = \frac{a}{2\epsilon} (u + \operatorname{sen} u \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u});$$

$$I = \frac{a}{2\epsilon} \left(\operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\epsilon}{a} x \right) + \frac{\epsilon}{a} x \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{a^2} x^2} \right).$$

Por tanto, se tiene que:

$$S = \frac{4\pi\, ab}{2\epsilon} \left(\operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\epsilon}{a} x \right) + \frac{\epsilon}{a} x \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{a^2} x^2} \right) \Big]_0^a;$$

$$S = \frac{2\pi\, ab}{\epsilon} [(\operatorname{arc\,sen} \epsilon + \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}) - (0 + 0)] = \frac{2\pi\, ab}{\epsilon} \left(\operatorname{arc\,sen} \epsilon + \frac{\epsilon b}{a} \right);$$

$$S = 2\pi\, b^2 + \frac{2\pi\, ab}{\epsilon} \operatorname{arc\,sen} \epsilon = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\epsilon} \operatorname{arc\,sen} \epsilon \right);$$

$$S = 2\pi b \left[b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \right] u^2.$$

10. Calcular el área entre $y = 0$ e $y = 1$ de la superficie de revolución engendrada al girar alrededor del eje Oy el arco de curva de ecuación $x = y^3$.

El área pedida viene dada por la fórmula $S = 2\pi \int_a^b F(y) \sqrt{1 + [F'(y)]^2}\, dy$, en donde

$$x = F(y) = y^3 \rightarrow F'(y) = 3y^2;\ a = 0 \text{ y } b = 1.$$

Así pues, se tiene:

$$S = 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + (3y^2)^2}\, dy = \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + 9y^4}\, dy.$$

Se hace el cambio de variable $1 + 9y^4 = u \rightarrow du = 36y^3\, dy$. Los nuevos límites de integración son: $\begin{cases} y = 0 \rightarrow u = 1, \\ y = 1 \rightarrow u = 10. \end{cases}$ Por consiguiente, resulta:

$$S = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{2\pi}{36} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big]_1^{10} = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1) = 3{,}5631\ u^2.$$

11. Ídem de la curva $y^2 + 4x - 2 \cdot \ln y = 0$ entre $y = 1$ e $y = 3$.

Despejando la variable x en la ecuación $y^2 + 4x - 2 \ln y = 0$, resulta $x = F(y) = \frac{1}{4} (2 \ln y - y^2)$; de donde, $F'(y) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{y} - 2y \right) = \frac{(1 - y^2)}{2y}$.

Así pues, el área pedida, aplicando la misma fórmula que en el ejercicio anterior, resulta:

$$S = 2\pi \int_1^3 \frac{1}{4}(2\ln y - y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{1-y^2}{2y}\right)^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\int_1^3 (2\ln y - y^2)\sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{4y^2}}\,dy;$$

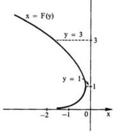
$$S = \frac{\pi}{2}\int_1^3 (2\ln y - y^2)\left(\frac{y^2+1}{2y}\right)dy = \frac{\pi}{4}\int_1^3 (2\ln y - y^2)\frac{y^2+1}{y}\,dy;$$

$$S = \frac{\pi}{4}\left[2\int_1^3 y\ln y\,dy + 2\int_1^3 \frac{\ln y}{y}\,dy - \int_1^3 y^3\,dy - \int_1^3 y\,dy\right];$$

$$S = \frac{\pi}{4}\left(\left(y^2\ln y - \frac{y^2}{2}\right) + (\ln y)^2 - \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right)\Big]_1^3;$$

$$S = \frac{\pi}{4}\left(\left(9\ln 3 - \frac{9}{2} + (\ln 3)^2 - \frac{81}{4} - \frac{9}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right);$$

$$S = \frac{\pi}{4}(9\ln 3 + (\ln 3)^2 - 28) = -13{,}2776\ \text{u}^2.$$



El área pedida debe interpretarse como el valor absoluto del resultado anterior: $S = 13{,}2776\ \text{u}^2$.

Obsérvese en la gráfica de la función $x = F(y)$ que el signo negativo de la integral es debido al hecho de que para $y \in [1, 3]$ la función $F(y) < 0$.

12. Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje Ox el recinto limitado por la curva $y = \text{sen}\,x$ y el segmento de dicho eje comprendido entre 0 y π.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

El volumen engendrado al girar una curva de ecuación $y = f(x)$ en torno al eje Ox entre los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$ viene dado por la fórmula: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

En el caso planteado en este ejercicio se tiene que el volumen pedido es:

$$V = \pi \int_0^\pi \text{sen}^2 x\,dx = \pi\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen}\,2x\right)\Big]_0^\pi = \pi\left(\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - (0 - 0)\right) = \frac{\pi^2}{2}\ \text{u}^3.$$

13. Calcular el volumen del sólido que engendra al girar alrededor del eje Ox la región comprendida entre dicho eje y la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } 1 \le x \le 3; \\ 2, & \text{si } 3 \le x \le 5. \end{cases}$

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

Se descompone el volumen buscado como suma de dos volúmenes V_1 y V_2 (véase figura siguiente), resultando que:

$$V = V_1 + V_2;$$

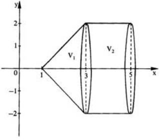
$$V = \pi \int_1^3 [f(x)]^2\,dx + \pi \int_3^5 [f(x)]^2\,dx;$$

$$V = \pi \int_1^3 (x-1)^2\,dx + \pi \int_5^3 2^2\,dx;$$

$$V = \pi \frac{(x-1)^3}{3}\Big]_1^3 + \pi\, 4x\Big]_3^5;$$

$$V = \left(\frac{8\pi}{3} - 0\right) + (20\pi - 12\pi);$$

$$V = \frac{8\pi}{3} + 8\pi = \frac{32}{3}\pi\ u^3.$$



Nota: Como comprobación se obtiene el mismo resultado anterior considerando que el volumen pedido es el de un cono y un cilindro, ambos de radio R = 2 y altura h = 2, aplicando las fórmulas conocidas de la geometría elemental.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi R^2 h}{3} + \pi R^2 h = \frac{8\pi}{3} + 8\pi = \frac{32}{3}\pi\ u^3.$$

14. Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje Ox el recinto del plano limitado por $y = x^3$, el eje Ox y la recta $x = 1$.

Aplicando la fórmula: $V = \pi \int_a^b y^2\,dx$, resulta:

$$V = \pi \int_0^1 (x^3)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^6\,dx = \frac{\pi}{7}x^7\Big]_0^1 = \frac{\pi}{7} - 0 = \frac{\pi}{7}\ u^3.$$

15. Determinar el volumen generado al girar alrededor de la recta $x = 4$ el recinto del plano limitado por dicha recta y la parábola $x = y^2$.

Para resolver este ejercicio se aplicará el *teorema de Guldin:*

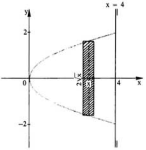
«El volumen de un cuerpo de revolución generado al girar una región plana alrededor de un eje exterior a ella, es igual al área de la región multiplicada por la longitud de la trayectoria que recorre el centro geométrico de la región.»

Es decir, $V = S \cdot 2\pi \cdot d$; donde S = área de la región y d = distancia del centro geométrico al eje de giro.

Se calcula, en primer lugar, el área de la región plana que va a generar el cuerpo de revolución:

$$S = 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3}\ u^2.$$

A continuación, se calcula el centro geométrico $G(\bar{x}, \bar{y})$ de la región:



$\bar{y} = 0$ (ya que la región es simétrica respecto a Ox);

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_0^4 x \, (2\sqrt{x}) \, dx = \frac{2}{S} \int_0^4 x^{3/2} \, dx;$$

$$\bar{x} = \frac{2}{S} \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} \Big]_0^4 = \frac{128}{5S} = \frac{128}{5} : \frac{32}{3} = \frac{12}{5}.$$

Resulta, pues, que el centro geométrico de la región es $G\left(\frac{12}{5}, 0\right)$.

La distancia del centro geométrico, $G\left(\frac{12}{5}, 0\right)$, al eje de giro, $x = 4$, es $d = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$ u.

Por consiguiente, según el teorema de Guldin, el volumen pedido resulta:

$$V = S \cdot 2\pi \cdot d = \frac{32}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{8}{5} = \frac{512}{15} \pi = 107{,}2330 \text{ u}^3.$$

Nota: Otra forma de realizar este ejercicio es considerar la parábola dada referida al eje de giro como eje de abscisas, de modo que venga descrita por la ecuación $y = -(x + 2)(x - 2) = -x^2 + 4$; entonces el volumen pedido viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)^2 \, dx = 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) \, dx;$$

$$V = 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right) \Big]_0^2 = 2\pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) - 0 = \frac{512}{15} \pi \text{ u}^3.$$

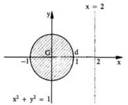
16. Hallar el volumen del sólido engendrado al girar la curva $x^2 + y^2 = 1$ alrededor de la recta $x = 2$.

Aplicando el teorema de Guldin como en el ejercicio anterior, se tiene que el volumen pedido viene dado por $V = S \cdot 2\pi \cdot d$.

Como el área del círculo unidad es $S = \pi$, y teniendo en cuenta que el centro geométrico del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es el origen de coordenadas, resulta que $d = 2$ y, por tanto,

$$V = \pi \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi^2 \text{ u}^3.$$

Nota: El cuerpo que se genera al girar un círculo en torno a un eje exterior a él recibe el nombre de *toro*.



17. Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje Oy el recinto limitado por la curva $y = x^3$, el eje Ox y la recta $x = 1$.

Como en los dos ejercicios anteriores se aplica el teorema de Guldin.

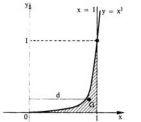
Se calcula el área del recinto que genera el volumen de revolución.

$$S = \int_0^1 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\,u^2.$$

La distancia del centro geométrico $G(\bar{x}, \bar{y})$ del recinto al eje de giro (eje Oy) es precisamente la coordenada $\bar{x}$. Así pues, se tiene:

$$d = \bar{x} = \frac{1}{S}\int_0^1 y\,x\,dx = \frac{1}{S}\int_0^1 x^3 \cdot x\,dx;$$

$$d = \frac{1}{S}\int_0^1 x^4\,dx = 4\left(\left.\frac{x^5}{5}\right]_0^1\right) = \frac{4}{5}\,u.$$



Por consiguiente, $V = S \cdot 2\pi \cdot d = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}\,\pi\,u^3$.

Nota: Otra forma de realizar este ejercicio es la siguiente:

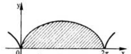
Se considera el volumen del cilindro de radio $R = 1$ y altura $h = 1$: $V_c = \pi R^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi\,u^3$.

El volumen pedido será el del cilindro V_c menos el volumen V_1 generado al girar alrededor del eje Oy la superficie limitada por el eje Oy y la curva $x = \sqrt[3]{y}$, para $0 \leqslant y \leqslant 1$. Así pues, se tiene que:

$$V_1 = \pi \int_0^1 x^2\,dy = \pi \int_0^1 (y^{1/3})^2\,dy = \pi \int_0^1 y^{2/3}\,dy = \pi \cdot \left.\frac{3}{5}\,y^{5/3}\right]_0^1 = \frac{3}{5}\,\pi\,u^3.$$

Y, por tanto, $V = V_c - V_1 = \pi - \frac{3}{5}\pi = \frac{2}{5}\,\pi\,u^3$.

18. Hallar el volumen engendrado al girar alrededor del eje de abscisas el recinto plano limitado por el primer arco de la cicloide de ecuaciones $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.



$$\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

El primer arco de la cicloide estará comprendido entre los dos primeros valores consecutivos de la variable x que hacen nulo el valor de la variable y. Así pues:

$$y = 1 - \cos t = 0 \;\rightarrow\; \cos t = 1 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; t_1 = 0,\; t_2 = 2\pi,\; \ldots;$$

y sustituyendo en la expresión $x = t - \operatorname{sen} t$ estos valores de t, resulta: $x_1 = 0 - \operatorname{sen} 0 = 0$ y $x_2 = 2\pi - \operatorname{sen} 2\pi = 2\pi$.

Teniendo en cuenta que $dx = (1 - \cos t)\,dt$, aplicando la fórmula $V = \pi \int_a^b y^2\,dx$, resulta que el volumen pedido es:

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t)\,dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,dt;$$

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t)\, dt;$$

$$V = \pi \left(\int_0^{2\pi} dt - 3 \int_0^{2\pi} \cos t\, dt + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt \right).$$

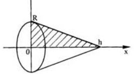
Puesto que son cero las integrales definidas en un período de las funciones que son potencias impares del coseno, se tiene:

$$V = \pi \left(\int_0^{2\pi} dt - 0 + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt - 0 \right) = \pi \left(t + 3 \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) \right) \Big]_0^{2\pi};$$

$$V = \pi \left(t + \frac{3t}{2} + \frac{3 \operatorname{sen} 2t}{4} \right) \Big]_0^{2\pi} = \pi\, ((2\pi + 3\pi + 0) - 0) = 5\pi^2 \text{ u}^3.$$

Nota: La *cicloide* es la curva que describe un punto de la circunferencia que rueda sin desplazamiento sobre el eje Ox.

19. Determinar el volumen de un cono de radio R y altura h.



El volumen de un cono de radio R y altura h es el volumen de revolución engendrado al girar en torno al eje Ox el recinto plano limitado por los ejes coordenados y la recta que pasa por los puntos (0, R) y (h, 0); es decir, la recta de ecuación: $y = -\dfrac{R}{h} x + R$. Así pues, el volumen del cono es:

$$V = \pi \int_0^h y^2\, dx = \pi \int_0^h \left(-\frac{R}{h} x + R \right)^2 dx;$$

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R^2}{h^2} x^2 - \frac{2R^2}{h} x + R^2 \right) dx;$$

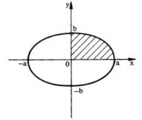
$$V = \pi \left(\frac{R^2}{3h^2} x^3 - \frac{R^3}{h} x^2 + Rx \right) \Big]_0^h = \pi \left[\left(\frac{R^2h^3}{3h^2} - \frac{R^3h^2}{h} + Rh \right) - 0 \right];$$

$$V = \pi \left(\frac{R^2h}{3} - R^2h + R^2h \right) = \frac{\pi}{3} R^2 h \text{ u}^3.$$

20. Hallar el volumen de revolución generado al girar alrededor del eje Ox la elipse de semiejes a y b.

Se considera la elipse centrada de semiejes a y b que tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Debido a la simetría de la elipse con respecto al eje Oy, resulta que el volumen engendrado por la elipse al girar alrededor del eje de abscisas es igual al doble del volumen engendrado por la parte de la elipse que está en el primer cuadrante. Así pues, el volumen pedido es

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^a y^2\, dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{2\pi\, b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx;$$

$$V = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - 0\right] = \frac{4}{3}\pi b^2 a \text{ u}^3.$$

21. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje Oy el recinto limitado por las parábolas $y = x^2$ y $27x = y^2$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

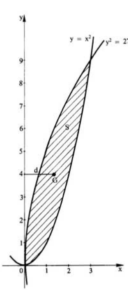
Para calcular el volumen pedido se aplica el teorema de Guldin (véase el ejercicio **15**), según el cual $V = S \cdot 2\pi \cdot d$.

Previamente se calculan los puntos comunes de ambas parábolas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = 27x \end{cases} \rightarrow x^4 = 27x \rightarrow$$

$$\rightarrow x(x^3 - 27) = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$y\ x_2 = 3.$$



El área del recinto es:

$$S = \int_0^3 (\sqrt{27x} - x^2)\, dx;$$

$$S = \sqrt{27}\,\frac{2}{3}\,x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = (18 - 9) - 0 = 9 \text{ u}^2.$$

Como el eje de giro es el eje de ordenadas, la distancia del centro geométrico $G(\bar{x}, \bar{y})$ al eje de giro es:

$$d = \bar{x} = \frac{1}{S}\int_0^3 x\,(\sqrt{27x} - x^2)\, dx;$$

$$d = \frac{1}{9}\int_0^3 (\sqrt{27}\,x^{3/2} - x^3)\, dx;$$

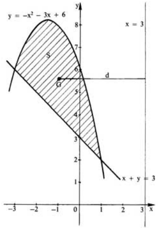
$$d = \frac{1}{9}\left(\sqrt{27}\,\frac{2}{5}\,x^{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^3;$$

$$d = \frac{1}{9}\left(\frac{162}{5} - \frac{81}{4}\right) - 0 = \frac{27}{20} \text{ u}.$$

Por consiguiente, el volumen pedido es $V = S \cdot 2\pi \cdot d = 9 \cdot 2\pi \cdot \dfrac{27}{20} = \dfrac{243}{10}\,\pi \text{ u}^3$.

22. Hallar el volumen engendrado al girar alrededor de la recta $x = 3$ el recinto plano limitado por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $x + y = 3$.

Como en el ejercicio anterior se aplica el teorema de Guldin, según el cual el volumen pedido resulta ser $V = S \cdot 2\pi \cdot d$.



Previamente se calculan los puntos comunes de la recta y la parábola

$$\begin{cases} y = -x^2 - 3x + 6 \\ x + y = 3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -x^2 - 3x + 6 = 3 - x \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -3.$$

El área del recinto viene dada por:

$$S = \int_{-3}^{1} [(-x^2 - 3x + 6) - (3 - x)]\, dx;$$

$$S = \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx;$$

$$S = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big]_{-3}^{1};$$

$$S = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - (9 - 9 - 9) = \frac{32}{3}\, u^2.$$

Se calcula la coordenada $\bar{x}$ del centro geométrico $G(\bar{x}, \bar{y})$ del recinto:

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_{-3}^{1} x(-x^2 - 2x + 3)\, dx = \frac{1}{S} \int_{-3}^{1} (-x^3 - 2x^2 + 3x)\, dx;$$

$$\bar{x} = \frac{3}{32} \left(-\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2\right)\Big]_{-3}^{1};$$

$$\bar{x} = \frac{3}{32} \left[\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2}\right)\right] = \frac{3}{32} \cdot \left(-\frac{32}{3}\right) = -1.$$

La distancia del centro geométrico al eje de giro es $d = 3 - \bar{x} = 3 - (-1) = 4$ u.

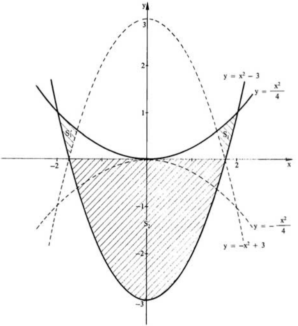
Así pues, en virtud del teorema de Guldin el volumen pedido es:

$$V = S \cdot 2\pi \cdot d = \frac{32}{3} \cdot 2\pi \cdot 4 = \frac{256}{3} \pi\, u^3.$$

23. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje Ox el recinto limitado por las curvas $x^2 = 4y$ e $y = x^2 - 3$.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

La situación que plantea este ejercicio presenta una complicación que no se daba en los anteriores, motivada por el hecho de que el eje de giro atraviesa al recinto que genera el cuerpo de revolución del cual se desea hallar su volumen.



Dibujando el simétrico respecto al eje de giro Ox del recinto dado, se observa que el cuerpo de revolución generado al girar dicho recinto alrededor del eje de abscisas equivale al generado al girar en torno a dicho eje de los tres recintos S_1, S_1' y S_2.

En primer lugar se determinan los puntos de corte de las distintas parábolas que aparecen en la figura anterior y de éstas con el eje de giro.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2; \quad \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = -x^2 + 3 \end{cases} \rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{12}{5}}, x_2 = \sqrt{\frac{12}{5}};$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$$

Sea V_1 el volumen generado al rotar en torno al eje de abscisas el recinto S_1.

$$V_1 = \pi \int_{\sqrt{\frac{12}{5}}}^{2} \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx - \pi \int_{\sqrt{\frac{12}{5}}}^{\sqrt{3}} (-x^2 + 3)^2 \, dx - \pi \int_{\sqrt{3}}^{2} (x^2 - 3)^2 \, dx;$$

$$V_1 = \pi \int_{\sqrt{\frac{12}{5}}}^{2} \frac{x^4}{16}\, dx - \pi \int_{\sqrt{\frac{12}{5}}}^{2} (x^4 - 6x^2 + 9)\, dx = \pi \int_{\sqrt{\frac{12}{5}}}^{2} \left(-\frac{15}{16} x^4 + 6x^2 - 9 \right) dx;$$

$$V_1 = \pi \left(-\frac{3}{16} x^5 + 2x^3 - 9x \right) \Big]_{\sqrt{\frac{12}{5}}}^{2} = \pi \left(-8 + \frac{264}{25} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \right) = 0{,}5647 \text{ u}^3.$$

Por razones de simetría, obviamente $V_1' = V_1 = 0{,}5647 \text{ u}^3$.

El volumen V_2 generado al rotar en torno al eje de abscisas el recinto S_2 es:

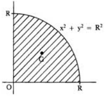
$$V_2 = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x^2 + 3)^2\, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (x^4 - 6x^2 + 9)\, dx = 2\pi \left(\frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x \right) \Big]_0^{\sqrt{3}};$$

$$V_2 = \frac{48\pi}{5} \cdot \sqrt{3} = 52{,}2374 \text{ u}^3.$$

Por consiguiente, el volumen pedido es

$$V = V_1 + V_1' + V_2 = 0{,}5647 + 0{,}5647 + 52{,}2374 = 53{,}3668 \text{ u}^3.$$

24. Sea el recinto limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ y los ejes coordenados. Determinar las coordenadas del centro geométrico en el primer cuadrante.



El área de un cuadrante de círculo es $S = \dfrac{\pi R^2}{4} \text{ u}^2$ (véanse los ejercicios **16** y **17** del tema III-5.2).

Las coordenadas del centro geométrico $G(\bar{x}, \bar{y})$ del primer cuadrante de círculo son

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_0^R x\, y\, dx = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Para calcular esta integral se hace el cambio de variable $u = R^2 - x^2 \rightarrow du = -2x\, dx$.

Los nuevos límites de integración son:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = R^2, \\ x = R \rightarrow u = 0, \end{cases} \text{ resultando:}$$

$$\bar{x} = -\frac{2}{\pi R^2} \int_{R^2}^{0} u^{1/2}\, du = -\frac{2}{\pi R^2} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big]_{R^2}^{0} = \frac{4}{3\pi R^2} R^3 - 0 = \frac{4}{3\pi} R.$$

Dado que la figura es simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante resulta que $\bar{y} = \bar{x}$. Así pues, el centro geométrico del primer cuadrante del círculo de radio R es: $G\left(\dfrac{4}{3\pi} R, \dfrac{4}{3\pi} R \right)$.

25. Ídem para la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

El área de un cuadrante de elipse es $S = \dfrac{\pi ab}{4} \text{ u}^2$ (véase el ejemplo de III-5.2.2. del texto).

Las coordenadas del centro geométrico de un cuadrante de elipse son:

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_0^a xy\, dx = \frac{4}{ab\pi} \int_0^a x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{4}{a^2\pi} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Haciendo el cambio de variable

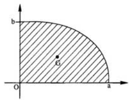
$$u = a^2 - x^2 \rightarrow du = -2x\,dx.$$

Los nuevos límites de integración son:

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow u = a^2, \\ x = a \rightarrow u = 0, \end{cases} \text{resultando:}$$

$$\bar{x} = -\frac{2}{a^2\pi}\int_{a^2}^{0} u^{1/2}\,du = -\frac{2}{a^2\pi}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big]_{a^2}^{0};$$

$$\bar{x} = \frac{4}{3a^2\pi}a^3 - 0 = \frac{4}{3\pi}a.$$



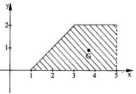
De manera análoga, se tiene:

$$\bar{y} = \frac{1}{S}\int_0^b yx\,dy = \frac{4}{ab\pi}\int_0^b y\sqrt{b^2 - y^2}\,dy = \frac{4}{3\pi}b.$$

Por tanto, el centro geométrico del primer cuadrante de una elipse de semiejes a y b es:

$$G\left(\frac{4}{3\pi}a, \frac{4}{3\pi}b\right).$$

26. Ídem para el recinto limitado por el eje Ox y la gráfica de la función
$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ si } 1 \le x \le 3; \\ 2, \text{ si } 3 \le x \le 5. \end{cases}$



La superficie del recinto es:

$$S = \int_1^3 (x - 1)\,dx + \int_3^5 2dx;$$

$$S = \frac{x^2}{2} - x\Big]_1^3 + 2x\Big]_3^5;$$

$$S = \left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) + 10 - 6 = 6\,u^2.$$

Las coordenadas del centro geométrico $G(\bar{x}, \bar{y})$ del recinto son:

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_1^5 xy\,dx = \frac{1}{6}\left(\int_1^3 x(x-1)\,dx + \int_3^5 2x\,dx\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} - x\Big]_1^3 + x^2\Big]_3^5\right);$$

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\left[(9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) + 25 - 9\right] = \frac{34}{9}.$$

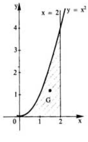
$$\bar{y} = \frac{1}{S}\int_0^2 y(5 - (y + 1))\,dy = \frac{1}{6}\int_0^2 y(-y + 4)\,dy = \frac{1}{6}\left(-\frac{y^3}{3} + 2y^2\right)\Big]_0^2;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}\left(-\frac{8}{3} + 8\right) = \frac{8}{9}.$$

Así pues, el centro geométrico del recinto dado es $G\left(\frac{34}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

27. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del recinto plano limitado por la curva $y = x^2$, el eje Ox y la recta $x = 2$.

El área del recinto es $S = \int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\,u^2$.



Las coordenadas del centro geométrico $G(\bar{x}, \bar{y})$ del recinto son:

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_0^2 xy\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x \cdot x^2\,dx;$$

$$\bar{x} = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{8}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{2}.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{S}\int_0^4 yx\,dy = \frac{3}{8}\int_0^4 y(2 - \sqrt{y})\,dy;$$

$$\bar{y} = \frac{3}{8}\left(y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Big]_0^4;$$

$$\bar{y} = \frac{3}{8}\left(16 - \frac{64}{5}\right) = \frac{6}{5}.$$

Así pues, las coordenadas del centro de gravedad del recinto dado son $G\left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right)$.

28. Aplicar el teorema de Guldin para determinar el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje Ox el recinto del ejercicio anterior.

Según el teorema de Guldin (véase el ejercicio **15**), al girar el recinto en torno al eje Ox resulta que el volumen de revolución que genera viene dado por $V = 2\pi \cdot \bar{y} \cdot S = 2\pi \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{5}\pi\,u^3$.

TEMA IV-1.1. —— Sucesos aleatorios

Ejercicios resueltos

1. *Una moneda se lanza tres veces consecutivas. Describir el espacio muestral:* a) *si sólo interesa el número total de casos;* b) *si interesa el resultado de cada lanzamiento.*

   (Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

   En el primer caso el espacio muestral E estará formado por todos los resultados posibles, sin considerar el orden en que puedan presentarse:

   E_1 = {(salen 3 caras), (salen 2 caras y 1 cruz), (salen 1 cara y 2 cruces), (salen 3 cruces)}.

   En el segundo caso hay que considerar el orden de aparición. Designando por C a la cara y por + a la cruz, el espacio será:

   $E_2 = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)\}$.

   Nota: Obsérvese que E_1 viene representado por las *combinaciones con repetición* de dos elementos, C y +, tomados tres a tres; por tanto:

   $$C'_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} \rightarrow \text{número de elementos de } E_1 = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4.$$

   El número de sucesos elementales que constituyen el caso E_2 viene representado por las *variaciones con repetición* de dos elementos, C y +, tomados tres a tres; es decir:

   $$V'_{m,n} = m^n \rightarrow \text{número de elementos de } E_2 = 2^3 = 8.$$

2. *Se consideran las 24 permutaciones posibles de los símbolos* 1, 2, 3, 4. *Sea* A_i *el suceso de que el dígito* i *aparezca en su lugar natural, donde* i = 1, 2, 3, 4. *Demostrar que:* a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subset A_4$; b) $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \subset \overline{A}_4$.

   (Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

   a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ significa que se producen los sucesos A_1, A_2 y A_3; esto es, que el dígito 1 aparece en primer lugar, que el dígito 2 aparece en segundo lugar y que el dígito 3 lo hace en tercer lugar; por tanto, el dígito 4 tiene que aparecer en cuarto lugar; es decir: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subset A_4$.

   b) Por análogo razonamiento, $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$ significa que el 1 ocupa el primer lugar, el 2 ocupa el segundo y que el tercer lugar no está ocupado por el 3; por tanto, el tercer lugar estará ocupado por el 4, y de aquí que el cuarto lo estará por el 3, apareciendo $\overline{A}_4$; es decir: $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \subset \overline{A}_4$.

3. *A partir de la asociatividad de la unión de sucesos, deducir la asociatividad de la intersección de sucesos.*

   Para los sucesos A_1, A_2, A_3 se cumple por el enunciado: $\overline{A}_1 \cup (\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3) = (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cup \overline{A}_3$.

   Hallando el suceso contrario: $\overline{\overline{A}_1 \cup (\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3)} = \overline{(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cup \overline{A}_3}$.

   Por las leyes de Morgan: $\overline{\overline{A}}_1 \cap \overline{(\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3)} = \overline{(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)} \cap \overline{\overline{A}}_3 \rightarrow$
   $\rightarrow \overline{\overline{A}}_1 \cap (\overline{\overline{A}}_2 \cap \overline{\overline{A}}_3) = (\overline{\overline{A}}_1 \cap \overline{\overline{A}}_2) \cap \overline{\overline{A}}_3$.

   Como $\overline{\overline{A}}_i = A_i$: $A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3$.

Solución de los ejercicios propuestos

1. Proponer diversos ejemplos de sucesos aleatorios y de sucesos deterministas.

Son ejemplos de sucesos aleatorios: Obtener 7 puntos al lanzar sucesivamente dos dados, sacar un rey al extraer una carta de la baraja.

Son ejemplos de sucesos deterministas: La intensidad de corriente eléctrica que circula por un circuito dado, el producto que se obtiene al reaccionar dos substancias químicas.

2. En los ejemplos de sucesos aleatorios anteriores señalar cuáles son los sucesos elementales.

Las distintas formas de obtener 7 puntos al lanzar sucesivamente dos dados son: $S = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

Las distintas maneras de sacar un rey al extraer una carta de la baraja son: S = {rey de oros, rey de copas, rey de espadas, rey de bastos}.

3. Se lanzan cinco monedas simultáneamente. Se dice que se ha presentado el suceso C_i si *«han aparecido i caras»*. Determinar el espacio muestral.

El espacio muestral de un experimento está formado por todos sus posibles resultados. Así pues, $E = \{C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$.

4. Se lanzan simultáneamente una moneda de peseta, otra de duro, otra de 25 pesetas y otra de 100 pesetas. Determinar el espacio muestral, sabiendo que se consideran distintos dos sucesos si, aunque se obtenga el mismo número de caras, son monedas de distinto valor las que presentan la «cara».

Si se representa cada resultado del experimento por una cuadrupla en la que cada posición indica el resultado del lanzamiento (C o +) de cada una de las cuatro monedas, el espacio muestral está constituido por los siguientes $2^4 = 16$ sucesos elementales:

$$E = \{(C, C, C, C), (C, C, C, +), (C, C, +, C), (C, C, +, +), (C, +, C, C), (C, +, C, +), (C, +, +, C), (C, +, +, +), (+, C, C, C), (+, C, C, +), (+, C, +, C), (+, C, +, +), (+, +, C, C), (+, +, C, +), (+, +, +, C), (+, +, +, +)\}.$$

5. Se lanzan dos datos simultáneamente. Se dice que se ha obtenido el suceso S_i si *«la suma de puntos obtenida es un múltiplo de i»*. ¿Cuáles son los sucesos elementales de S_2?

Para resolver este ejercicio y los que le siguen es conveniente fijar el espacio muestral del experimento «lanzar simultáneamente dos dados», que estará compuesto por todos los posibles resultados del experimento.

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}.$$

Observando cuáles de los sucesos elementales que componen el espacio muestral son tales que la suma de sus puntos es múltiplo de 2, se tiene que $S_2 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (6, 6)\}$.

6. Resolver el ejercicio anterior para S_4 y S_6.

Procediendo de igual modo que en el ejercicio anterior, se obtiene que $S_4 = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (6, 6)\}$ y $S_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (6, 6)\}$.

7. Verificar si en el ejercicio **5** y **6** se cumple que $S_2 \supset S_4$ o que $S_2 \subset S_4$.

Se da $S_2 \supset S_4$. No se da $S_2 \subset S_4$.

8. Ídem para S_2 y S_6.

Se da $S_6 \subset S_2$. No se da $S_2 \subset S_6$.

9. Ídem para S_4 y S_6.

No se da ni $S_4 \subset S_6$, ni $S_6 \subset 4$.

10. Escribir los sucesos elementales de $\overline{S_2}$, $\overline{S_3}$ y $\overline{S_6}$.

$\overline{S_2} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$.

$\overline{S_3} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$.

$\overline{S_6} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$.

11. ¿Son compatibles o incompatibles S_4 y S_6? ¿Y $\overline{S_4}$ y $\overline{S_6}$?

Los sucesos S_4 y S_6 son compatibles, ya que $S_4 \cap S_6 \neq \varnothing$.

Los sucesos $\overline{S_4}$ y $\overline{S_6}$ son compatibles, ya que $\overline{S_4} \cap \overline{S_6} \neq \varnothing$.

12. ¿Son compatibles S_3 y S_7? ¿Y $\overline{S_3}$ y $\overline{S_7}$?

Los sucesos S_3 y S_7 son incompatibles, ya que $S_3 \cap S_7 = \varnothing$. Obsérvese que m.c.m. $(3, 7) = 21$, y no existe ninguna posibilidad de obtener un múltiplo de 21 al tirar dos dados.

Los sucesos $\overline{S_3}$ y $\overline{S_7}$ son compatibles, ya que $\overline{S_3} \cap \overline{S_7} \neq \varnothing$. Por ejemplo, $(1, 3) \in \overline{S_3} \cap \overline{S_7}$.

13. Con la notación de los ejercicios anteriores, hallar los sucesos elementales de:

a) $S_4 \cup S_8$.	*b)* $\overline{S_4} \cup S_8$.	*c)* $S_4 \cup \overline{S_8}$.
d) $\overline{S_4} \cup \overline{S_8}$.	*e)* $\overline{\overline{S_4} \cup \overline{S_8}}$	*f)* $S_4 \cap S_8$.
g) $\overline{S_4} \cap S_8$.	*h)* $S_4 \cap \overline{S_8}$.	*i)* $\overline{S_4} \cap \overline{S_8}$.
j) $\overline{S_2} \cup S_6$.	*k)* $S_2 \cup \overline{S_6}$.	*l)* $\overline{S_2} \cup \overline{S_6}$.
m) $\overline{\overline{S_2} \cup \overline{S_6}}$	*n)* $S_2 \cap S_6$.	*o)* $\overline{S_2} \cap S_6$.
p) $S_2 \cap \overline{S_6}$.	*q)* $\overline{S_2} \cap \overline{S_6}$.	*r)* $\overline{\overline{S_2} \cap \overline{S_6}}$

a) $S_4 \cup S_8 = S_4 = \{(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (6, 6)\}$.

b) $\overline{S_4} \cup S_8 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$.

c) $S_4 \cup \overline{S_8} = E$.

d) $\overline{S_4} \cup \overline{S_8} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$.

e) $\overline{S_4 \cup S_8} = \overline{S_4} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$.

f) $S_4 \cap S_8 = S_8 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$.

g) $\overline{S_4} \cap S_8 = \varnothing$.

h) $S_4 \cap \overline{S_8} = \{(1, 3), (2, 2), (6, 6)\}$.

i) $\overline{S_4} \cap \overline{S_8} = \overline{S_4 \cup S_8} = \overline{S_4} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$.

j) $\overline{S_2} \cup S_6 = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$.

k) $S_2 \cup \overline{S_6} = E$.

l) $\overline{S_2} \cup \overline{S_6} = \overline{S_2 \cap S_6} = \overline{S_6} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$.

m) $\overline{S_2 \cup S_6} = \overline{S_2} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$.

n) $S_2 \cap S_6 = S_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (6, 6)\}$.

o) $\overline{S_2} \cap S_6 = \varnothing$

p) $S_2 \cap \overline{S_6} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (4, 6), (5, 5)\}$.

q) $\overline{S_2} \cap \overline{S_6} = \overline{S_2} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$.

r) $\overline{S_2 \cap S_6} = \overline{S_6} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$.

14. Se llama *diferencia* de dos sucesos A y B, y se representa $A - B$, a la intersección del suceso A con el contrario de B. Demostrar que el suceso $A - B$ contiene todos los sucesos elementales de A que no son sucesos de B.

Sea x un suceso elemental de A que no es suceso elemental de B; entonces, x es un suceso elemental de A y x es un suceso elemental del contrario de B. Es decir, $x \in A \cap \overline{B}$. Y, por definición de diferencia de sucesos, x es un suceso elemental de $A - B$.

15. Dado un suceso cualquiera, halla el suceso $A - A$.

Aplicando la definición de diferencia de sucesos: $A - A = A \cap \overline{A} = \varnothing$.

16. Se llama *diferencia simétrica* de dos sucesos A y B, y se escribe $A \Delta B$, al suceso $(A - B) \cup (B - A)$. Probar que el suceso $A \Delta B$ se presenta si y sólo si lo hace uno de los sucesos A o B.

Según la definición de «diferencia simétrica» y «diferencia» de sucesos:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Se pueden presentar cuatro casos:

a) Si se verifican ambos sucesos, A y B, los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ no se presentan y, por tanto, tampoco ni $A \cap \overline{B}$ ni $B \cap \overline{A}$; luego $A \Delta B$ no se da.

b) Si no se verifican ninguno de los dos sucesos A y B, tampoco lo harán $A \cap \overline{B}$ y $B \cap \overline{A}$ y, por consiguiente, no se verifica $A \Delta B$.

c) Si se verifica A y no se presenta B, se verifica $\overline{B}$; luego también se verifica $A \cap \overline{B}$ y, por tanto, se presenta $A \Delta B$.

d) Análogamente, si se presenta B y no lo hace A, se cumple $B \cap \overline{A}$ y, por consiguiente, $A \Delta B$.

17. Siendo A un suceso cualquiera, obtener el suceso $A \Delta A$.

Aplicando la definición de diferencia simétrica de sucesos y el resultado obtenido en el ejercicio **15**, se tiene: $A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

18. En un tetraedro regular se numeran sus caras con los dígitos 1, 2, 3, 4. Designando por T_i el *«obtener la cara i»* al lanzar el tetraedro al aire, se forman todas las ternas de sucesos elementales posibles: $K_1 = \{T_1, T_2, T_3\}$; $K_2 = \{T_1, T_2, T_4\}$;... Con los sucesos $K_1, K_2, \ldots$, ¿se puede formar un sistema completo de sucesos?

Considérense todos los sucesos formados por las posibles ternas de sucesos elementales:

$K_1 = \{T_1, T_2, T_3\}$, $K_2 = \{T_1, T_2, T_4\}$, $K_3 = \{T_1, T_3, T_4\}$ y $K_4 = \{T_2, T_3, T_4\}$.

A partir de éstos, el sistema de suscesos $\{\overline{K_1}, \overline{K_2}, \overline{K_3}, \overline{K_4}\}$, forma un sistema completo de sucesos. En efecto, $\overline{K_1} = \{T_4\}$, $\overline{K_2} = \{T_3\}$, $\overline{K_3} = \{T_2\}$ y $\overline{K_4} = \{T_1\}$ y, por tanto, se dan las dos condiciones necesarias para que una colección de sucesos forme un sistema completo: *a)* $\overline{K_1} \cup \overline{K_2} \cup \overline{K_3} \cup \overline{K_4} = E$ y *b)* $\overline{K_i} \cap \overline{K_j} = \varnothing$, para $i \neq j$.

19. ¿Se puede formar un sistema completo de sucesos con los sucesos $H_1 = \{T_1, T_2\}$; $H_2 = \{T_1, T_3\}$; $H_3 = \{T_1, T_4\}$;... del ejercicio anterior?

Considérense todos los sucesos formados por las posibles parejas de sucesos elementales: $H_1 = \{T_1, T_2\}$, $H_2 = \{T_1, T_3\}$, $H_3 = \{T_1, T_4\}$, $H_4 = \{T_2, T_3\}$, $H_5 = \{T_2, T_4\}$ y $H_6 = \{T_3, T_4\}$.

A partir de estos sucesos se puede formar el sistema de sucesos: $\{H_1 \cap H_2, H_1 \cap H_5, H_2 \cap H_4, H_3 \cap H_5\}$. Como $H_1 \cap H_2 = \{T_1\}$, $H_1 \cap H_5 = \{T_2\}$, $H_2 \cap H_4 = \{T_3\}$ y $H_3 \cap H_5 = \{T_4\}$, según lo visto en el ejercicio anterior, forman un sistema completo de sucesos.

20. A partir de la propiedad de simplificación de la unión de sucesos, deducir la propiedad de simplificación de la intersección de sucesos.

Aplicando la ley de simplificación de la unión a los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$, se tiene: $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{A}) = \overline{A}$.

Hallando el contrario de ambos miembros: $\overline{\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A$.

Aplicando las leyes de Morgan al primer miembro, se obtiene:

$$\overline{\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{A})} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{(\overline{B} \cup \overline{A})} = A \cap (\overline{\overline{B}} \cup \overline{\overline{A}}) = A \cap (B \cup A).$$

En definitiva, resulta la ley de simplificación de la intersección: $A \cap (B \cup A) = A$.

21. A partir de $A \cap A = A$, probar que $A \cup A = A$.

Aplicando al suceso $\overline{A}$ el hecho de que la intersección de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto: $\overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}$.

Hallando el contrario de ambos miembros, y aplicando al primero las leyes de Morgan, se tiene:

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{A}} = \overline{\overline{A}} \rightarrow A \cup A = A.$$

22. A partir de la propiedad distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, deducir su propiedad dual $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Aplicando la propiedad distributiva de la unión con respecto a la intersección a los sucesos $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$, se tiene: $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})$.

Hallando el contrario de ambos miembros y aplicando las leyes de Morgan, resulta:

$$\overline{\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})} = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{C})}$$

$$\overline{\overline{A}} \cap \overline{(\overline{B} \cap \overline{C})} = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \cup \overline{(\overline{A} \cup \overline{C})}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

TEMA IV-2.1. ———— Probabilidades

Ejercicios resueltos

1. *Se lanzan al aire cuatro monedas. Se pide:*

a) *¿Cuál es la probabilidad de* «obtener a lo sumo tres cruces»?

b) *¿Cuál es la probabilidad de* «obtener exactamente dos caras»?

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

a) El suceso *«obtener a lo sumo tres cruces»* es el suceso contrario de *«obtener cuatro cruces»*. Como la probabilidad de éste es:

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{16} \rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

b) El número de casos favorables a *«obtener exactamente dos caras»* es:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \rightarrow P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

2. *De una baraja de 40 cartas se sacan tres al azar. Hallar la probabilidad de que sean* «un as, un rey y un seis».

El número de casos posibles, ya que no influye el orden de colocación, es:

$$C_{40,3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9\,880.$$

El número de casos favorables es $4 \cdot 4 \cdot 4$, dado que hay cuatro cartas de cada valor en la baraja. Por consiguiente:

$$P(A) = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{9\,880} = \frac{64}{9\,880} = \frac{8}{1\,235}.$$

3. *Una caja contiene 8 bolas rojas, 4 azules y 6 verdes. Se extraen tres bolas al azar.*

a) *Escribir el espacio muestral S.*

b) *Obtener la probabilidad de los sucesos elementales.*

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

a) Designando, respectivamente, por R, A y V la extracción de bola roja, azul y verde, el espacio muestral es:

$$\{RRR, RRA, RAA, RRV, RVV, RAV, AAA, AAV, AVV, VVV\}.$$

b) La probabilidad de cada suceso es:

$$P(RRR) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{56}{816} = \frac{7}{102}; \qquad P(RRA) = \frac{\binom{8}{2} \cdot 4}{\binom{18}{3}} = \frac{112}{816} = \frac{7}{51};$$

$$P(RAA) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 8}{\binom{18}{3}} = \frac{48}{816} = \frac{1}{17}; \qquad P(RRV) = \frac{\binom{8}{2} \cdot 6}{\binom{18}{3}} = \frac{168}{816} = \frac{7}{34};$$

$$P(RVV) = \frac{\binom{6}{2} \cdot 8}{\binom{18}{3}} = \frac{120}{816} = \frac{5}{34}; \qquad P(RAV) = \frac{8 \cdot 4 \cdot 6}{\binom{8}{3}} = \frac{192}{816} = \frac{4}{17};$$

$$P(AAA) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{4}{816} = \frac{1}{204}; \qquad P(AAV) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 6}{\binom{18}{3}} = \frac{36}{816} = \frac{3}{68};$$

$$P(AVV) = \frac{\binom{6}{2} \cdot 4}{\binom{18}{3}} = \frac{60}{816} = \frac{5}{68}; \qquad P(VVV) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{20}{816} = \frac{5}{204}.$$

4. *Sea* $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ *un espacio muestral y* p *una medida de probabilidad en* S *definida por:* $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = \frac{1}{8}$, $p(e) = p(f) = \frac{1}{4}$. *Se consideran los sucesos* $A\{a, c, d, e\}$ *y* $B = \{d, e, f\}$. *Hallar* $p(A)$, $p(B)$, $p(A \cup B)$ *y* $p(A \cap B)$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

S, en efecto, es un espacio muestral, dado que:

$$p(a) + p(b) + p(c) + p(d) + p(e) + p(f) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{8} + \frac{2}{4} = 1.$$

Para el suceso $A = \{a, c, d, e\}$, como a, c, d y e son incompatibles por ser elementales, se tiene:

$$p(A) = p(a) + p(c) + p(d) + p(e) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 1 + 1 + 2}{8} = \frac{5}{8}.$$

Análogamente:

$$p(B) = p(d) + p(e) + p(f) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 2 + 2}{8} = \frac{5}{8}.$$

Como $A \cup B = \{a, c, d, e, f\}$, resulta:

$$p(A \cup B) = p(a) + p(c) + p(d) + p(e) + p(f) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8}.$$

Como $A \cap B = \{d, e\}$, se tiene:

$$p(A \cap B) = p(d) + p(e) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

5. *Un experimento consiste en* «extraer una bola de una urna» *que contiene una bola azul, dos blancas y tres rojas. Sea* $\Omega = \{a, b, r\}$ *el espacio muestral y* C *el conjunto de las partes de* Ω, *es decir:*

$$C = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{r\}, \{a, b\}, \{a, r\}, \{b, r\}, \Omega\}.$$

Se define una función p *sobre* C *de la siguiente manera:*

$p(\varnothing) = 0;$ $\quad p(\{a\}) = \frac{1}{6};$ $\quad p(\{b\}) = \frac{1}{3};$ $\quad p(\{r\}) = \frac{1}{2};$

$p(\{a, b\}) = \frac{1}{2};$ $\quad p(\{a, r\}) = \frac{2}{3};$ $\quad p(\{b, r\}) = \frac{5}{6};$ $\quad p(\Omega) = 1.$

¿Es una probabilidad?

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Evidentemente, como C es el conjunto de las partes de Ω, C es una **σ-álgebra** y (Ω, C) es un **espacio probabilístico.** Para que p sea una **probabilidad** tiene que suceder que:

I. $p(\Omega) = 1.$

Se cumple por definición.

II. Para cada dos elementos disjuntos de C, *la probabilidad de su unión debe ser la suma de las probabilidades de dichos sucesos.*

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} p(\varnothing \cup \{a\}) = p(\{a\}) = \frac{1}{6} \\ p(\varnothing) + p(\{a\}) = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \to p(\varnothing \cup \{a\}) = p(\varnothing) + p(\{a\}).$$

Análogamente:

$p(\varnothing \cup \{b\}) = p(\varnothing) + p(\{b\}) = \frac{1}{3};$ $\qquad p(\varnothing \cup \{r\}) = p(\varnothing) + p(\{r\}) = \frac{1}{2};$

$p(\varnothing \cup \{a, b\}) = p(\varnothing) + p(\{a, b\}) = \frac{1}{2};$ $\qquad p(\varnothing \cup \{a, r\}) = p(\varnothing) + p(\{a, r\}) = \frac{2}{3};$

$p(\varnothing \cup \{b, r\}) = p(\varnothing) + p(\{b, r\}) = \frac{5}{6};$ $\qquad p(\varnothing \cup \Omega) = p(\varnothing) + p(\Omega) = 1.$

También se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} p(\{a\} \cup \{b\}) = p(\{a, b\}) = \frac{1}{2} \\ p(\{a\}) + p(\{b\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \to p(\{a\} \cup \{b\}) = p(\{a\}) + p(\{b\}).$$

Análogamente:

$p(\{a\} \cup \{r\}) = p(\{a\}) + p(\{r\}) = \frac{2}{3};$

$p(\{a\} \cup \{b, r\}) = p(\{a\}) + p(\{b, r\}) = \frac{6}{6} = 1.$

$p(\{b\}) \cup \{r\}) = p(\{b\}) + p(\{r\}) = \frac{5}{6};$

$p(\{b\} \cup \{a, r\}) = p(\{b\}) + p(\{a, r\}) = \frac{3}{3} = 1;$

$p(\{r\} \cup \{a, b\}) = p(\{r\}) + p(\{a, b\}) = \frac{2}{2} = 1.$

6. *En una urna hay tres bolas rojas y dos blancas y en otra cinco bolas numeradas con las cifras 1, 2, 3, 4, 5. De cada urna se toma una bola al azar. El suceso* «extraer bola con número par» *se designa por* A *y el* «extraer bola roja» *por* B. *Describir en términos de los sucesos elementales los sucesos* $A \cup B$ *y* $\overline{A - B}$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

El suceso $A \cup B$ se presenta si se obtiene número par o si se obtiene bola roja, o si suceden ambos sucesos. Por tanto, $A \cup B$ en términos de los sucesos elementales es:

$$A \cup B = \{(2, r), (2, b), (4, r), (4, b), (1, r), (3, r), (5, r)\}.$$

Como, por definición de diferencia de sucesos, $A - B = A \cap \overline{B}$, aplicando las leyes de Morgan, se puede escribir:

$$\overline{A - B} = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B,$$

que representa el suceso «*no salir bola con número par o presentarse bola roja*», que equivale a «*obtener bola con número impar o bola roja*». Por tanto:

$$\overline{A - B} = \overline{A} \cup B = \{(1, r), (1, b), (3, r), (3, b), (5, r), (5, b), (2, r), (4, r)\}.$$

7. *Un dado está cargado de forma que, al lanzarlo, la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número. Obtener la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un número par.*

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Por la condición del problema se tiene:

$$\frac{P(1)}{1} = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6}.$$

Como $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1.$$

Sumando antecedentes y consecuentes en la serie de razones iguales:

$$\frac{P(1)}{1} = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = \frac{P(5)}{5} = \frac{P(6)}{6} = \frac{1}{21}.$$

Es decir:

$$P(1) = \frac{1}{21}; P(2) = \frac{2}{21}; P(3) = \frac{3}{21}; P(4) = \frac{4}{21}; P(5) = \frac{5}{21}; P(6) = \frac{6}{21}.$$

La probabilidad de obtener número par, 2, 4 o 6, dado que son sucesos independientes, es:

$$P(2) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

8. *A los 65 años la probabilidad de que una persona sea miope es 0,1, la probabilidad de que tenga cataratas es 0,25 y la probabilidad de que sea miope y tenga cataratas es 0,15. ¿Cuál es la probabilidad de que a los 65 años una persona sea miope o tenga cataratas?*

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

Sea M el suceso «*ser miope a los 65 años*», y C «*tener cataratas a los 65 años*». El suceso pedido es $M \cup C$ y su probabilidad es:

$$P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0,1 + 0,25 - 0,15 = 0,2.$$

9. *Una enciclopedia consta de ocho tomos, titulado el primero* «Matemáticas». *Calcular la probabilidad de que, al elegir dos tomos al azar, resulte el tomo* «Matemáticas».

(Propuesto en la Univ. de Valencia.)

El número de casos posibles es $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$.

El número de casos favorables se obtiene observando que el tomo de *«Matemáticas»* puede, para formar pareja, venir acompañado de uno de los otros siete tomos.

Por consiguiente: $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$.

10. *En una bolsa hay cuatro bolas blancas y tres negras. Calcular la probabilidad de que al sacar simultáneamente tres bolas sean del mismo color.*

(Propuesto en la Univ. de Santiago.)

El número total de extracciones posibles es $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$.

Las tres bolas blancas se pueden obtener de $\binom{4}{3} = 4$ formas y las tres bolas negras de $\binom{3}{3} = 1$ forma. Por tanto, como ambos casos son incompatibles, designando por A el suceso *«obtener tres bolas del mismo color»*, se tiene:

$$P(A) = \frac{4}{35} + \frac{1}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Se lanzan simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada suceso elemental. Calcular la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos en un lanzamiento sea menor que 7.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto formado por los posibles resultados del mismo. Para el experimento «lanzar simultáneamente dos lados» el espacio muestral es:

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}.$$

Si se considera que en cada dado obtener una cualquiera de sus caras tiene la misma probabilidad, ocurre que al lanzar dos dados se dan $V'_{6,2} = 6^2 = 36$ parejas de resultados posibles equiprobables, cada una de ellas con probabilidad $p = \frac{1}{36}$. Según esto, en el experimento «lanzar simultáneamente dos dados» los sucesos elementales que forman el espacio muestral E no son equiprobables, ya que al suceso (i, j), con $i \neq j$, le son favorables dos de las 36 parejas de resultados equiprobables (cuando en el primer dado se obtiene i y en el segundo j, y cuando en el primero se obtiene j y en el segundo i); sin embargo, al suceso elemental (i, i) sólo le es favorable una de las parejas de resultados equiprobables. Así pues, en el experimento «lanzar simultáneamente dos dados» $P[(i, j)] = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$, para $i \neq j$, y $P[(i, i)] = \frac{1}{36}$.

La probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea menor que 7 es

$$P = P\{i + j < 7\} = P\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3)\} \rightarrow$$

$$\rightarrow P = 6 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{12}.$$

2. En el ejercicio resuelto **6** obtener la probabilidad de los sucesos elementales que forman A ∪ B.

Según el ejercicio resuelto **6**, $A \cup B = \{(2, r), (2, b), (4, r), (4, b), (1, r), (3, r), (5, r)\}$. Se estudia la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales que forman A ∪ B. Considérese, por ejemplo, el suceso (2, r); teniendo en cuenta que el número total de las formas posibles de extraer 5 bolas de una urna y 5 de otra es $5 \cdot 5 = 25$, como el suceso (2, r) se da en 3 de estos casos se tiene, según la regla de Laplace, que $P\{(2, r)\} = \frac{3}{25}$. Análogamente, para los demás sucesos de A ∪ B, resulta:

$$P\{(2, r)\} = P\{(4, r)\} = P\{(1, r)\} = P\{(3, r)\} = P\{(5, r)\} = \frac{3}{25}; \quad P\{(2, b)\} = P\{(4, b)\} = \frac{2}{25}.$$

Por consiguiente, $P(A \cup B) = 5 \cdot \frac{3}{25} + 2 \cdot \frac{2}{25} = \frac{19}{25} = 0{,}76.$

3. Una urna contiene bolas numeradas del 1 al 10. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea múltiplo de tres, distinguiendo los casos: *a)* con reemplazamiento; *b)* sin reemplazamiento.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Se estudian las distintas formas de obtener un múltiplo de 3 como suma de tres sumandos. Se distinguen tres tipos de números según el resto que se obtiene al dividirlos por 3: los que dan de resto cero (a_0), los que dan de resto uno (a_1) y los que dan de resto dos (a_2). De entre los diez primeros números son del tipo a_0 el 3, 6 y 9; son del tipo a_1 el 1, 4, 7 y 10; y son del tipo a_2 el 2, 5 y 8. Los distintos modos de obtener un múltiplo de 3 como suma de tres sumandos son:

$$\dot{3} = a_0 + a_0 + a_0; \quad \dot{3} = a_0 + a_1 + a_2; \quad \dot{3} = a_0 + a_2 + a_1;$$

$$\dot{3} = a_1 + a_0 + a_2; \quad \dot{3} = a_1 + a_2 + a_0; \quad \dot{3} = a_2 + a_0 + a_1;$$

$$\dot{3} = a_2 + a_1 + a_0; \quad \dot{3} = a_1 + a_1 + a_1; \quad \dot{3} = a_2 + a_2 + a_2.$$

a) Con reemplazamiento. Las formas posibles de extraer con reemplazamiento tres bolas de una urna con diez son $V'_{10,3} = 10^3 = 1\,000$. Los casos favorables al suceso planteado son el total de los correspondientes a cada uno de los nueve casos descritos arriba.

$$\text{C. favorables} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 +$$

$$+ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 3 = 334.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{334}{1\,000} = \frac{167}{500} = 0{,}334.$

b) Sin reemplazamiento. Las formas posibles de extraer sin reemplazamiento tres bolas de una urna con diez son $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Los casos favorables al suceso planteado son:

$$\text{C. favorables} = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 +$$

$$+ 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 252.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{252}{720} = \frac{7}{20} = 0{,}35.$

4. Sean A, B y C tres sucesos incompatibles con $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}25$; $P(C) = 0{,}166$. Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Aplicando las leyes de Morgan y la expresión de la probabilidad del suceso contrario se tiene que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$; como la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos (propiedad II de la definición de probabilidad), se tiene que

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - [0{,}5 + 0{,}25] = 0{,}25.$$

Análogamente,

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - [P(A) + P(B) + P(C)];$$

$$P = 1 - [0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}166] = 0{,}084.$$

5. Una urna contiene ocho bolas rojas, cinco verdes y nueve azules. Si se extraen dos bolas al azar, hallar la probabilidad de que no haya ninguna bola azul.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

Los posibles modos de extraer dos bolas de una urna con veintidós son $C_{22,\,2} = \binom{22}{2} = 231$.

Los casos favorables al suceso planteado son todas las formas de extraer dos bolas de entre aquellas que no son azules; es decir, $C_{13,\,2} = \binom{13}{2} = 78$.

Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{78}{231} = \dfrac{26}{77} = 0{,}3377$.

6. Se lanzan dos monedas al aire. Hallar la probabilidad de obtener dos caras.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

El espacio muestral del experimento es $E = \{CC, C+, +C, ++\}$. Como los sucesos elementales son equiprobables, y sólo uno de ellos es favorable al suceso planteado, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

7. De un dado imperfecto se sabe que la probabilidad de obtener las distintas caras es proporcional a la mitad de los números de éstas. Hallar la probabilidad de que al lanzar el dado salga un número par.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Designando por P_i la probabilidad de obtener i puntos, se tienen las siguientes relaciones de proporcionalidad:

$$\frac{P_1}{\frac{1}{2}} = \frac{P_2}{\frac{2}{2}} = \frac{P_3}{\frac{3}{2}} = \frac{P_4}{\frac{4}{2}} = \frac{P_5}{\frac{5}{2}} = \frac{P_6}{\frac{6}{2}} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6}{\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2}} = \frac{1}{\frac{21}{2}} = \frac{2}{21}.$$

A partir de ellas, se obtienen los valores de P_i.

$$\frac{P_i}{\frac{i}{2}} = \frac{2}{21} \rightarrow P_i = \frac{i}{21}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Por consiguiente, la probabilidad pedida es $P = P_2 + P_4 + P_6 = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = 0{,}57.$

8. Si A y B son dos de los posibles sucesos que pueden presentarse en un experimento aleatorio, calcular, en función de las probabilidades $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, las probabilidades de:

a) C: *«no se presenta ninguno de los sucesos* A *y* B*»*.

b) D: *«se presenta exactamente uno de los sucesos* A *o* B*»*.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

a) $P(C) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)].$

b) $P(D) = P((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$

9. S es un espacio muestral, A y B son sucesos de S y P es una medida de probabilidad en S. Se sabe que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}7$; $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}3$. Calcular $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

A partir de la expresión $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, restando a ambos miembros de la igualdad el valor de $P(A \cap B)$ resulta:

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = -\frac{1}{2}[P(A \cup B) - P(A \cap B) - P(A) - P(B)].$$

Sustituyendo en esta expresión los valores conocidos, se tiene que

$$P(A \cap B) = -\frac{1}{2}(0{,}3 - 0{,}6 - 0{,}7) = 0{,}5.$$

Por consiguiente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}8.$

10. Dados tres sucesos A, B y C, relativos a un determinado experimento aleatorio, se consideran los sucesos $S_1 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ y $S_2 = (A \cup B) \cap C$.

Interpretar lo que significan respecto a A, B y C y estudiar si son incompatibles.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

El suceso S_1 se interpreta como el suceso que consiste en que ocurre C, pero no ocurren ni A ni B.

El suceso S_2 se interpreta como el suceso consistente en que ocurre C y además alguno de los sucesos A o B o ambos.

Los sucesos S_1 y S_2 son incompatibles, ya que su intersección es vacía.

$$S_1 \cap S_2 = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C \cap (A \cup B) \cap C = \overline{(A \cup B)} \cap (A \cup B) \cap C = \varnothing \cap C = \varnothing.$$

11. En una bolsa hay doce bolas blancas y ocho negras. Hallar la probabilidad de que al extraer sucesivamente, y sin devolución, tres bolas:

a) Las dos primeras bolas sean negras y la tercera bola sea blanca.

b) Se obtengan dos bolas negras y una bola blanca en cualquier orden.

(Propuesto en la UNED.)

Las formas posibles de extraer sin reemplazamiento tres bolas de una urna que contiene veinte son $V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6\,840$.

a) Teniendo en cuenta que en una extracción sin reemplazamiento las posibilidades de una extracción están determinadas por el número de bolas que permanecen en la urna después de realizadas las extracciones anteriores, se tiene que los casos favorables al suceso planteado son $8 \cdot 7 \cdot 12 = 672$; y, por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{672}{6\,840} = \frac{28}{285} = 0{,}0982$.

b) Las distintas formas de extraer sucesivamente y sin devolución dos bolas negras y una blanca son NNB, NBN, BNN. Por tanto, los casos favorables al suceso planteado son la suma de los casos favorables a cada una de las tres formas citadas anteriormente; es decir, $8 \cdot 7 \cdot 12 + 8 \cdot 12 \cdot 7 + 12 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,016$. Así pues, la probabilidad pedida es

$$P = \frac{2\,016}{6\,840} = \frac{28}{95} = 0{,}29.$$

12. Se lanzan dos dados al azar y se suman los valores de las dos caras que se obtienen. Describir cuántos pueden ser los sucesos aleatorios asociados a este experimento. Calcular cuál es la suma de mayor probabilidad y determinar ésta.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

El espacio muestral del experimento aleatorio «sumar las puntuaciones que se obtienen al lanzar dos dados» es $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Recordando (véase el ejercicio **5** del tema anterior) que al lanzar dos dados se obtienen $V'_{6,2} = 6^2 = 36$ parejas de resultados equiprobables; por simple observación de las mismas, resulta que las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales de E son:

$$P(2) = P(12) = \frac{1}{36} = 0{,}02778; \quad P(3) = P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0{,}05556;$$

$$P(4) = P(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}08333;$$

$$P(5) = P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}\dot{1}11\dot{1}; \quad P(6) = P(8) = \frac{5}{36} = 0{,}1389;$$

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1667.$$

Por consiguiente, la suma más probable es 7, con probabilidad $\frac{1}{6}$.

13. Se lanzan al aire cinco dados a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 7 puntos?

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Al lanzar cinco dados se pueden dar $V'_{6,5} = 6^5 = 7\,776$ casos equiprobables.

Se estudian los casos favorables al suceso contrario $\overline{A}$ obtener una puntuación inferior o igual a 7. Se consideran las siguientes situaciones:

a) Suma 5. Sólo se da en un caso, cuando en los cinco dados se obtiene un uno.

b) Suma 6. Se consigue cuando se obtienen cuatro unos y un dos, lo que supone $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$ casos.

c) Suma 7. Se puede obtener sacando cuatro unos y un tres, lo que representa $P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$ casos; o bien, sacando tres unos y dos doses, lo que representa otros $P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ casos más; en total $10 + 5 = 15$ casos.

Así pues, los casos favorables al suceso $\overline{A}$ son $1 + 5 + 15 = 21$. Por tanto, la probabilidad pedida es $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{21}{7\,776} = \frac{2\,585}{2\,592} = 0{,}997$.

14. En una urna hay cuatro monedas de 1 peseta y tres de 5 pesetas. Se sacan al azar dos monedas sucesivamente, sin devolución. Se pide:

a) Describir el espacio muestral correspondiente.

b) Calcular la probabilidad de que se obtengan 10 pesetas, al sacar dichas dos monedas.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

a) Representando por P extraer una moneda de 1 pta y por D extraer una moneda de 5 pta (duro), el espacio muestral del experimento aleatorio planteado es $E = \{PP, PD, DP, DD\}$. Las probabilidades correspondientes a cada uno de los sucesos elementales que componen el espacio muestral son:

$$P(PP) = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} = \frac{2}{7}; \qquad P(PD) = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} = \frac{2}{7};$$

$$P(DP) = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{2}{7}; \qquad P(DD) = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7}.$$

b) El suceso obtener diez pesetas se da solamente en el caso DD; por tanto, la probabilidad pedida es $P = P(DD) = \frac{1}{7}$.

15. Se distribuyen al azar nueve bolas entre tres cajas. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera caja contenga cuatro bolas?

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

El número de casos posibles es $V'_{3,9} = 3^9 = 19\,683$, ya que cada una de las nueve bolas puede colocarse indistintamente en cada una de las tres cajas.

Se estudian los casos favorables al suceso planteado. Las cuatro bolas que van a ocupar la primera caja pueden elegirse de $C_{9,4} = \binom{9}{4} = 126$ maneras diferentes; por cada una de estas combinaciones, las cinco bolas restantes pueden colocarse en las otras dos cajas de $V'_{2,5} = 2^5 = 32$ formas distintas; resultando, en definitiva, que los casos favorables son $\binom{9}{4} 2^5 = 4\,032$.

Así pues, la probabilidad pedida es $P = \frac{4\,032}{19\,683} = \frac{448}{2\,187} = 0{,}2048$.

16. Pedro y Juan están en una reunión con otras ocho personas. Entre los diez presentes se reparten al azar diez papeletas, numeradas del 1 al 10. ¿Qué probabilidad hay de que Pedro y Juan tengan números consecutivos?

Las distintas formas en que se pueden repartir diez papeletas entre diez personas son $P_{10} = 10!$.

Suponiendo que al repartir las papeletas Juan y Pedro reciben la primera y la segunda papeletas, serán favorables al suceso las permutaciones que comiencen por 1,2; 2,3; 3,4; 4,5; 5,6; 6,7; 7,8; 8,9; y 9,10; así como las que comiencen por las inversiones de éstas, lo que supone un total de $9 \cdot 2 = 18$ situaciones. Cada una de estas situaciones incluye $P_8 = 8!$ casos diferentes, que resultan de considerar los distintos modos de repartir las 8 papeletas restantes entre las otras ocho personas del grupo. Así pues, los casos favorables al suceso planteado son $18 \cdot 8!$.

Por consiguiente, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{18 \cdot 8!}{10!} = \dfrac{18}{2!} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2.$

17. La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0,6; la de que apruebe física es 0,5; y la de que apruebe las dos es 0,2.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una asignatura?

b) ¿Y la de que no apruebe ninguna?

c) ¿Y la de que no apruebe física y matemáticas?

(Propuesto en la UNED.)

Representando por M el suceso aprobar matemáticas y por F aprobar física, se tiene que $P(M) = 0{,}6$, $P(F) = 0{,}5$ y $P(M \cap F) = 0{,}2$.

a) El suceso aprobar al menos una asignatura es $M \cup F$, y su probabilidad es

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}9.$$

b) El suceso no aprobar ninguna asignatura es $\overline{M} \cap \overline{F}$, y su probabilidad es

$$P(\overline{M} \cap \overline{F}) = P(\overline{M \cup F}) = 1 - P(M \cup F) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

c) El suceso no aprobar física y matemáticas es $\overline{M \cap F}$, y su probabilidad es

$$P(\overline{M \cap F}) = 1 - P(M \cap F) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

18. En una clase mixta, que tiene 30 alumnas, 15 estudiantes repiten curso, de los que 10 son alumnos, y hay 15 alumnos que no repiten curso.

a) Justificar que el número de estudiantes es 55.

b) Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que sea alumno? ¿Y de que sea alumno y repita?

c) Si se eligen dos alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?

(Propuesto en la UNED.)

a) A partir de la situación planteada en el problema se puede construir una tabla de doble entrada en la que se distinguen dentro de la clase cuatro grupos disjuntos de estudiantes. En la tabla que aparece más abajo se han escrito en negrita los datos apartados por el enunciado y en letra normal los deducidos a partir de ellos de una manera elemental mediante sumas y restas.

	Alumno	*alumna*	*total*
repite	**10**	5	**15**
no repite	**15**	25	40
total	25	**30**	55

b) A la vista del cuadro anterior, resulta que la probabilidad de que el estudiante elegido sea alumno es $P = \frac{25}{55} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$, y la probabilidad de que el estudiante elegido sea alumno y repita es $P = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} = 0{,}1818$.

c) Las formas posibles de elegir dos alumnos al azar son $C_{25,2} = \binom{25}{2} = 300$, y las formas de elegir al azar dos alumnos que no repiten son $C_{15,2} = \binom{15}{2} = 105$. Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{105}{300} = \frac{7}{20} = 0{,}35$.

19. Se lanzan tres dados al aire. Calcular la probabilidad de que se obtengan:

a) Cuatro puntos en cada dado.

b) Una suma total de puntos igual a 8.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Los casos posibles que se pueden obtener al lanzar tres dados son $V'_{6,3} = 6^3 = 216$.

a) Obviamente, sólo hay un caso favorable al suceso planteado. Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{1}{216} = 0{,}00463$.

b) Al tirar tres dados pueden obtenerse 8 puntos de alguna de las siguientes maneras:

$$6 + 1 + 1, \qquad 5 + 2 + 1, \qquad 4 + 3 + 1, \qquad 4 + 2 + 2 \quad \text{y} \quad 3 + 3 + 2.$$

Cada una de estas maneras da origen, al considerar los distintos órdenes en que pueden aparecer los sumandos, respectivamente, a los siguientes casos: $P_3^{2,1} = 3$, $P_3 = 6$, $P_3 = 6$, $P_3^{2,1} = 3$ y $P_3^{2,1} = 3$; resultando un total de $3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21$ casos favorables. Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{21}{216} = \frac{7}{72} = 0{,}0972$.

Nota: Otra manera de contar los casos favorables es tener en cuenta que el número de formas en que se puede descomponer el 8 como suma de tres sumandos no nulos es igual a los $C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$ modos en que se pueden distribuir dos barras en los siete huecos entre asteriscos en el modelo siguiente: |********|. Obsérvese que ninguno de los sumandos puede ser superior a 6, con lo cual se corresponden con los resultados del lanzamiento de tres dados.

20. En un casino están jugando con un dado trucado. Se sabe que la probabilidad de que salga una cara es proporcional a su número. Calcular la probabilidad de que salga 3.

(Propuesto en la Univ. de León.)

Designando por P_i la probabilidad de obtener la cara i del dado se verifican las siguientes relaciones de proporcionalidad:

$$\frac{P_1}{1} = \frac{P_2}{2} = \frac{P_3}{3} = \frac{P_4}{4} = \frac{P_5}{5} = \frac{P_6}{6} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6} = \frac{1}{21}.$$

Por consiguiente, $\frac{P_3}{3} = \frac{1}{21} \rightarrow P_3 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} = 0{,}1429.$

21. Luis y Antonio se reúnen con otras tres personas. Entre las cinco se reparten al azar cinco billetes de 100, 500, 1000, 2000 y 5000 pesetas. Hallar la probabilidad de que Luis y Antonio tengan billetes cuyos valores sean uno doble del otro.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Los casos posibles son las distintas maneras de repartir cinco billetes; es decir, $P_5 = 5! = 120$.

Fijándose sólo en los billetes que reciben Luis y Antonio, las situaciones favorables al suceso son los cuatro siguientes: (500, 1 000), (1 000, 500), (1 000, 2 000) y (2 000, 1 000). Cada una de estas situaciones incluye $P_3 = 3! = 6$ casos, que resultan de considerar las formas en que se pueden repartir los tres billetes restantes. Así pues, los casos favorables al suceso planteado son $4 \cdot 3! = 24$.

Por consiguiente, la probabilidad pedida es $P = \frac{4 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

22. Se lanza un dado doce veces. Hallar la probabilidad de obtener un as a lo sumo diez veces.

Se estudia el suceso contrario $\overline{A}$ obtener once o doce ases.

Los casos posibles son $V'_{6,\,12} = 6^{12}$.

Se estudian los casos favorables al suceso obtener once ases; es decir, todas las tiradas menos una son ases; esta tirada puede ser una cualquiera de las doce y en ella se puede obtener uno cualquiera de los cinco resultados que no son el as, lo que supone un total de $12 \cdot 5 = 60$ casos.

Como, obviamente, doce ases sólo se pueden obtener de una manera, resulta que el total de los casos favorables al suceso $\overline{A}$ son $60 + 1 = 61$.

Por consiguiente, la probabilidad pedida es:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{61}{6^{12}} = 1 - 2{,}80 \cdot 10^{-8} = 0{,}999999972 \text{ (A es prácticamente seguro).}$$

Nota: Este problema también se puede abordar utilizando el concepto de distribución binomial, según el cual se considera cada lanzamiento como una prueba independiente en la que el «éxito» sacar as tiene probabilidad $p = \frac{1}{6}$ y el «fracaso» no sacar as tiene probabilidad $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. La probabilidad del suceso $\overline{A}$ es:

$$P(\overline{A}) = P_{11} + P_{12} = \binom{12}{11}\left(\frac{1}{6}\right)^{11}\left(\frac{5}{6}\right)^{1} + \binom{12}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{0};$$

$$P(\overline{A}) = 12 \cdot \frac{1}{6^{11}} \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6^{12}} \cdot 1 = \frac{12 \cdot 5 + 1}{6^{12}} = \frac{61}{6^{12}}.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{61}{6^{12}}$.

23. Se lanza un dado cuatro veces consecutivas. Calcular la probabilidad de obtener por lo menos un 6.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Se estudia el suceso contrario $\overline{A}$ no obtener ningún 6 en las cuatro tiradas. Los casos favorables al suceso $\overline{A}$ son los distintos resultados que se pueden conseguir al considerar que en cada lanzamiento se pueden obtener cualquiera de los cinco tantos posibles del dado excluido el 6; es decir, los casos favorables a $\overline{A}$ son $V'_{5,4} = 5^4 = 625$.

Como los casos posibles son $V'_{6,4} = 6^4 = 1\,296$, resulta que la probabilidad pedida es

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{625}{1\,296} = \frac{671}{1\,296} = 0{,}5177.$$

24. Dado un conjunto 1, 2, ..., n, se elige un número cualquiera al azar. Hallar la probabilidad de que sea múltiplo de h ($h \leq n$).

El número de múltiplos de h que hay en los n primeros números naturales es el cociente q de la división entera de n entre h. Así pues, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{q}{n}$.

Obsérvese que si n es un número grande, de la relación fundamental de los elementos de una división entera $n = q\,h + r$, resulta:

$$P = \frac{q}{n} = \frac{n - r}{h \cdot n} = \frac{1}{h} - \frac{r}{h \cdot n} \;\rightarrow\; \frac{1}{h} \text{ (cuando } n \rightarrow \infty).$$

25. De una baraja de 40 cartas se eligen dos al azar. Calcular la probabilidad de que, siendo del mismo palo, sean consecutivas o, si no son del mismo palo, de que tengan igual valor.

Se considera que la extracción se hace de una vez; por consiguiente, los casos posibles del experimento extraer dos cartas de entre cuarenta son $C_{40,2} = \binom{40}{2} = 780$. Se estudian los casos favorables al suceso planteado; para ello se representa cada carta por su valor y su palo; por ejemplo, 1E = as de espadas, 5C = cinco de copas, 8B = ocho de bastos.

Los distintos modos de extraer dos cartas, que siendo del mismo palo, sean consecutivas son: (1*, 2*), (2*, 3*), (3*, 4*), (4*, 5*), (5*, 6*), (6*, 7*), (7*, 8*), (8*, 9*), (9*, 10*), donde el asterisco en cada caso puede tomar cualquiera de los valores E, O, C o B de los cuatro palos de la baraja, lo que supone un total de $9 \cdot 4 = 36$ casos.

De manera análoga, las distintas maneras de obtener cartas de igual valor, pero de distinto palo son: (*E, *O), (*E, *C), (*E, *B), (*O, *C), (*O, *B), (*C, *B), donde el asterisco puede tomar en cada caso uno de los diez posibles valores de las cartas, lo que supone $\binom{4}{2} \cdot 10 = 6 \cdot 16 = 60$ casos.

En definitiva, los casos favorables al suceso planteado son la suma de los casos descritos arriba $36 + 60 = 96$.

Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{96}{780} = \dfrac{8}{65} = 0{,}1231$.

26. Una persona rellena un boleto de apuestas de fútbol, marcando tres partidos con los tres resultados posibles (1, X, 2) y cuatro con dos resultados (1, X). Hallar la probabilidad de que acierte los 14 resultados.

El número de apuestas posibles que se pueden hacer en una quiniela son $V'_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$.

Como cada vez que en un boleto se apuesta un partido al triple se multiplica por tres el número de apuestas y cada vez que se hace al doble se multiplica por dos, el número total de apuestas que supone un boleto con tres triples y cuatro dobles es $3^3 \cdot 2^4 = 432$.

Por tanto, suponiendo que el resultado de las quinielas sea producto del azar, la probabilidad pedida es

$$P = \frac{432}{3^{14}} = \frac{16}{177\,147} = 9{,}032 \cdot 10^{-5}.$$

27. En el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que acierte 13 resultados, pero no 14 resultados?

Partiendo de las 432 apuestas diferentes que figuran en el boleto, se desea averiguar cuántos de los 3^{14} posibles resultados de una quiniela son tales que el apostante obtiene 13 resultados en alguna de sus 432 apuestas pero no 14.

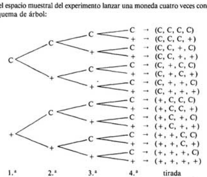
Son casos favorables al suceso aquellos resultados de quiniela que se obtienen al modificar cualquiera de las 432 apuestas del boleto en uno cualquiera de los 7 partidos aportados de manera simple, sustituyendo el signo de la apuesta por uno cualquiera de los otros dos signos posibles, lo que supone un total de $432 \cdot 7 \cdot 2 = 6\,048$ casos (en estos casos la apuesta con trece aciertos falla en un partido apostado simple). También son casos favorables aquellos resultados de quiniela que se obtienen al modificar cualquiera de las 432 apuestas en uno cualquiera de los cuatro partidos apostados al doble (1X), sustituyendo el pronóstico realizado por un 2, lo que supone un total de $432 \cdot 4 \cdot 1 = 1\,728$ casos (en estos casos la apuesta con trece aciertos falla en un partido apostado doble).

En definitiva, los casos favorables son $6\,048 + 1\,728 = 7\,776$; y, por tanto, la probabilidad pedida es

$$P = \frac{7\,776}{3^{14}} = \frac{32}{19\,683} = 0{,}001626.$$

28. Se lanza una moneda cuatro veces consecutivas. Escribir el espacio muestral y obtener la probabilidad de que se obtengan sólo dos cruces, y en tiradas no consecutivas.

Para construir el espacio muestral del experimento lanzar una moneda cuatro veces consecutivas se utiliza el siguiente esquema de árbol:



El espacio muestral está formado por $V'_{2,4} = 2^4 = 16$ sucesos elementales.

Los casos favorables al suceso A obtener sólo dos cruces en tiradas no consecutivas son: (C, +, C, +), (+, C, +, C) y (+, C, C, +); y, por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{3}{16} = 0{,}1875$.

TEMA IV-2.2. —— Probabilidad condicionada. Teorema de Bayes

Ejercicios resueltos

1. *Al llamar a la centralita telefónica de un colegio, la probabilidad de que el teléfono esté comunicando es 0,3 y la probabilidad de que la telefonista nos diga que la extensión que pedimos comunica es 0,2. Hallar la probabilidad de que logremos comunicar con la extensión deseada.*

   (Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

   Designando por A el suceso que consiste en «*llamar a la centralita y ésta comunica*» y por B el suceso que consiste en «*la telefonista dice que la extensión comunica*», el suceso «*comunicar con la extensión deseada*» será:

   $$\overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \cdot p(\overline{B}),$$

   donde se supone que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son sucesos independientes.

   $$\text{Como} \begin{cases} p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \\ p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 \end{cases} \Rightarrow p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

2. *Siendo* A *y* B *dos sucesos independientes, comprobar que sus sucesos contrarios,* $\overline{A}$ *y* $\overline{B}$*, son también independientes.*

   (Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

   Para que $\overline{B}$ sea independiente de $\overline{A}$, hay que probar que $P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{B})$.

   En efecto:

   $$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)},$$

   donde se han aplicado, sucesivamente, la ley de Morgan y la probabilidad del suceso contrario.

   Pero, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

   $$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(A)}.$$

   Dado que A y B son independientes por el enunciado, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Por tanto:

   $$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A) - P(B)\,[1 - P(A)]}{1 - P(A)}.$$

   $$P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{[1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)]}{1 - P(A)} = 1 - P(B) = P(\overline{B}).$$

3. *¿Cuál es el número mínimo de veces que hay que lanzar un dado para que la probabilidad de que salga al menos una vez el número 3 sea mayor que 1/2?*

   (Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

   Designando por A el suceso «*obtener al menos un 3 en n tiradas*», el suceso $\overline{A}$ será «*no obtener 3 en n tiradas*».

   La $P(\overline{A})$ se calcula teniendo en cuenta que cada tirada es independiente y que la probabilidad de «*no obtener un 3 en una tirada*» es $\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$.

$$P(\bar{A}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \overset{n}{\cdots\cdots\cdots} \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \rightarrow P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Como P(A) debe ser mayor que $\frac{1}{2}$: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$.

Tomando logaritmos: $\log\left(\frac{5}{6}\right)^n = n \cdot \log\frac{5}{6} = n \cdot (\log 5 - \log 6) < \log\frac{1}{2} = -\log 2$.

Como $(\log 5 - \log 6) < 0 \Rightarrow n > \dfrac{\log 2}{\log 6 - \log 5} = \dfrac{0{,}30103}{0{,}07918} = 3{,}8018\ldots$

El menor número de tiradas será 4.

4. *Se tiene una baraja de 48 cartas. Se toman dos cartas al azar, restituyendo la primera al mazo antes de tomar la segunda. ¿Qué probabilidad hay de que sean dos ases? Calcular la probabilidad si no se restituye la primera carta.*

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

La probabilidad buscada es $P(A_1 \cap A_2)$.

En el primer caso los sucesos A_1 y A_2 son independientes; por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{4}{48} \cdot \frac{4}{48} = \frac{1}{144}.$$

En el segundo caso $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1)$; por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{48} \cdot \frac{4-1}{48-1} = \frac{4}{48} \cdot \frac{3}{47} = \frac{1}{188}.$$

5. *El 60 % de las personas que el verano pasado ascendieron al pico Aneto tenían menos de 30 años y el 80 % eran catalanes. Escogida una persona al azar, que en el verano pasado subió al Aneto, se pide:*

a) *Si tiene menos de 30 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea catalán?*

b) *Si es catalán, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años?*

c) *¿Cuál es la probabilidad de que no sea catalán y tenga más de 30 años?*

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

Designando por M el suceso «*haber ascendido al Aneto el verano pasado, teniendo menos de 30 años*» y por C el suceso «*haber ascendido al Aneto el verano pasado y ser catalán*», se tienen:

$$P(M) = 0{,}6 \text{ y } P(C) = 0{,}8.$$

a) La primera probabilidad pedida es $P(C/M)$. Al ser C y M independientes:

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C) \cdot P(M)}{P(M)} = P(C) = 0{,}8.$$

b) La segunda probabilidad buscada es $P(\bar{M}/C)$:

$$P(\bar{M}/C) = \frac{P(\bar{M} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\bar{M}) \cdot P(C)}{P(C)} = P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

c) La tercera probabilidad pedida es $P(\bar{C} \cap \bar{M})$:

$$P(\bar{C} \cap \bar{M}) = P(\bar{C}) \cdot P(\bar{M}) = [1 - P(C)] \cdot [1 - P(M)] = (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}6) = 0{,}08.$$

6. *En un aula se examinan de una recuperación de matemáticas 18 alumnos de 1.º de BUP y 12 alumnos de 2.º de BUP. Un alumno termina y entrega su ejercicio. Si se desconoce de qué curso es, ¿cuál es la probabilidad de que el primer alumno que entregue sea de 1.º de BUP? Se supone que la entrega se produce al azar, esto es, que no hay motivo para que tarden más los alumnos de un curso que los de otro.*

Designando por P_i el suceso *«salir un alumno de 1.º de BUP en el lugar i»* y por S_j el suceso *«salir un alumno de 2.º de BUP en el lugar j»*, se tiene:

Si el primer alumno es de 1.º de BUP: $p(P_1) = \dfrac{18}{18 + 12} = \dfrac{18}{30}$.

Si el segundo alumno fuese de 1.º de BUP: $p(P_2/P_1) = \dfrac{18 - 1}{30 - 1} = \dfrac{17}{29}$.

Análogamente: $p(S_1) = \dfrac{12}{18 + 12} = \dfrac{12}{30}$; $\quad p(P_2/S_1) = \dfrac{18}{30 - 1} = \dfrac{18}{29}$.

Luego, la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} + \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} = \frac{18(17 + 12)}{30 \cdot 29} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

Nota: Obsérvese que la probabilidad sigue siendo la misma, haya salido o no un alumno.

7. *Se elige al azar una urna U_1, con probabilidad x, y otra urna U_2, con probabilidad $1 - x$. La probabilidad de elegir bola blanca en la primera es 1/2 y 1/4 en la segunda. ¿Cuál es la función de x de que la bola blanca haya sido extraída de la primera urna?*

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Sean los sucesos U_1 *«elegir la primera urna»*, U_2 *«elegir la segunda urna»* y B *«extraer bola blanca»*. La probabilidad pedida es $P(U_1/B)$. Aplicando la fórmula de Bayes:

$$P(U_1/B) = \frac{P(U_1) \cdot P(B/U_1)}{P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2)} = \frac{x \cdot \dfrac{1}{2}}{x \cdot \dfrac{1}{2} + (1 - x) \cdot \dfrac{1}{4}} = \frac{2x}{1 + x} = y.$$

Solución de los ejercicios propuestos

1. Hallar la probabilidad de que al lanzar un dado n veces se obtenga al menos un 6.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Se estudia el suceso contrario $\overline{A}$ no obtener ningún 6 en las n tiradas.

Los casos favorables al suceso $\overline{A}$ son las distintas formas de obtener en cada uno de los n lanzamientos cualquiera de los cinco resultados del dado, excluido el 6; es decir, $V'_{5,n} = 5^n$.

Como los casos posibles son $V'_{6,n} = 6^n$, la probabilidad pedida es

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5^n}{6^n} = \frac{6^n - 5^n}{6^n}.$$

Nota: Este problema también puede plantearse considerando el suceso no obtener un 6 en cada uno de los lanzamientos como sucesos independientes de probabilidad $\dfrac{5}{6}$, con lo cual la probabilidad del suceso $\overline{A}$ es la de la probabilidad compuesta: $P(\overline{A}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

2. Una urna contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se extraen sucesivamente dos bolas. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que las bolas extraídas tengan número impar, si se introduce la bola en la urna después de la primera extracción.

b) Hallar la probabilidad de que la primera bola tenga número par y la segunda impar, sin reemplazamiento.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

a) Teniendo en cuenta que de las veinte bolas diez de ellas son impares, y que las extracciones se producen con reemplazamiento, se tiene que los casos favorables al suceso planteado son $V'_{10,\,2} = 10^2 = 100$, y los casos posibles $V'_{20,\,2} = 20^2 = 400$. Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{100}{400} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

b) Teniendo en cuenta que las extracciones son sin reemplazamiento, los casos posibles son $V_{20,2} = 20 \cdot 19 = 380$.

Considerando que en la primera extracción son favorables 10 posibilidades y que en la segunda lo son 10, son casos favorables al suceso planteado $10 \cdot 10 = 100$. Así pues, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{100}{380} = \dfrac{5}{19} = 0{,}2632$.

Nota: De otra manera, considerando los sucesos A_i extraer una bola par en la i-ésima extracción, B_i extraer bola impar en la i-ésima extracción, para $i = 1$ y 2, resulta que las probabilidades pedidas son:

a) $P = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$, ya que B_1 y B_2 son sucesos independientes.

b) $P = P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) = \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{10}{19} = \dfrac{5}{19}$.

3. De una baraja de 40 cartas se toman cuatro cartas. Calcular la probabilidad de que las cuatro sean de palos distintos.

(Propuesto en la Univ. de Zaragoza.)

Se calcula el número de casos favorables al suceso. Si las cartas se extraen de una en una, para la primera extracción se dispone de 40 opciones; para la segunda extracción de 30, pues se deben eliminar como no favorables todas las cartas del palo de la carta extraída en primer lugar; para la tercera extracción son 20 las opciones, y para la cuarta 10. Así pues, los casos favorables al suceso son $40 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 10 = 240\,000$.

Como los casos posibles son $V_{40,\,4} = 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2\,193\,360$, la probabilidad pedida es

$$P = \frac{240\,000}{2\,193\,360} = \frac{1\,000}{9\,139} = 0{,}1094.$$

4. Se arrojan dos dados; sea A el suceso «*la diferencia entre las puntuaciones obtenidas en los dos dados es 2*» y B el suceso «*obtener al menos un 6*». Hallar la probabilidad de $A \cup B$.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

Se considera que el lanzamiento de los dados es sucesivo, de forma que el número de casos posibles es $V'_{6,\,2} = 36$ (véase el problema 1 del tema anterior).

Se estudian los casos favorables a los sucesos A, B y $A \cap B$.

$A = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 6), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\};$

$B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (4, 6), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\};$

$A \cap B = \{(4, 6), (6, 4)\}.$

Así pues, $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$, $P(B) = \frac{11}{36}$ y $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$. Por tanto, la probabilidad pedida es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{8 + 11 - 2}{36} = \frac{17}{36} = 0{,}4722.$$

5. De una baraja de 40 cartas se sacan tres cartas al azar. Hallar la probabilidad de que sean un as, un rey y un seis.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Las distintas formas en que se pueden extraer de una vez tres cartas de una baraja son

$$C_{40,3} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9\,880.$$

Los casos favorables al suceso planteado son $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, ya que son cuatro los ases, cuatro los reyes y cuatro seises de la baraja. Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{64}{9\,880} = 0{,}006478$.

6. Una pieza de artillería dispone de siete obuses para lanzar a su objetivo. En cada disparo la probabilidad de alcanzarlo es 1/7. Hallar la probabilidad de alcanzar el objetivo con los siete disparos.

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Como cada disparo es un suceso independiente de los otros, si A_i es el suceso obtener un blanco en el disparo i-ésimo, la probabilidad pedida es

$$P = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_7) = \left(\frac{1}{7}\right)^7 = 1{,}2143 \cdot 10^{-6}.$$

7. En el ejercicio anterior, ¿cuál es la probabilidad de alcanzar el objetivo al menos una vez?

Se estudia el suceso contrario $\overline{A}$ no alcanzar el blanco con ningún disparo. La probabilidad de dicho suceso es

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_7) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\overline{A}_7) = \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0{,}3399.$$

Así pues, la probabilidad pedida es $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0{,}6601$.

8. ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar el objetivo del ejercicio **6** exactamente con dos disparos?

Se considera la distribución binomial en la que la probabilidad del «éxito» alcanzar el blanco es $p = \frac{1}{7}$, y la del «fracaso» no alcanzar el blanco es $q = 1 - p = \frac{6}{7}$.

La probabilidad pedida es la de alcanzar 2 éxitos en 7 pruebas; es decir:

$$P_2 = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)^5 = 21 \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{7\,776}{16\,807} = \frac{23\,328}{117\,649} = 0{,}1983.$$

9. Calcular la probabilidad de ganar uno o más juegos en una serie de m juegos independientes si la probabilidad de ganar uno cualesquiera de ellos es p. Hallar el valor de p para que esta probabilidad sea igual a $1 - \frac{1}{2^m}$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Siendo p la probabilidad de ganar un juego, la probabilidad de no ganarlo es $1 - p$; como los juegos son independientes, la probabilidad de no ganar ninguno de los n juegos es $(1 - p)^m$, y la probabilidad de ganar uno o más juegos (suceso contrario del anterior) es $1 - (1 - p)^m$.

Imponiéndole a dicha probabilidad la condición que plantea el enunciado del problema se tiene:

$$1 - (1 - p)^m = 1 - \frac{1}{2^m} \rightarrow (1 - p)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \rightarrow 1 - p = \frac{1}{2} \rightarrow p = \frac{1}{2}.$$

10. De una baraja de 40 cartas se sacan dos cartas al azar. Hallar la probabilidad de que las cartas sean:

a) Las dos de oros.

b) Las dos de espadas o figuras.

(Propuesto en la Univ. de Zaragoza.)

Se considera que la extracción de las dos cartas se hace de una vez, con lo cual los casos posibles son $C_{40,2} = \binom{40}{2} = 780$.

a) Las distintas maneras en que se pueden extraer dos cartas de oros son $C_{10,2} = \binom{10}{2} = 45$; de modo que, la probabilidad pedida resulta $P = \frac{45}{780} = \frac{3}{52} = 0{,}05769$.

b) Teniendo en cuenta que el número de cartas que son espadas o figuras son 19 (10 espadas y 9 figuras de los otros palos), resulta que el número de maneras de extraer dos espadas o figuras es $C_{19,2} = \binom{19}{2} = 171$.

Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{171}{780} = \frac{57}{260} = 0{,}21923$.

11. Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, de probabilidades P_A y P_B. Hallar las probabilidades de los sucesos S_1 *«acontece exactamente uno de los sucesos* A *o* B*»* y S_2 *«acontecen los dos sucesos»*.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

El suceso S_1 se puede escribir como unión de sucesos incompatibles $S_1 = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$, de manera que $P(S_1) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A})$.

Teniendo en cuenta que el suceso $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ es unión de sucesos incompatibles, resulta que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$, y análogamente $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$.

Como A y B son sucesos independientes, $P(A \cap B) = P_A \cdot P_B$; por tanto,

$$P(S_1) = P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A}) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P_A + P_B - 2 \cdot P_A \cdot P_B$$

El suceso $S_2 = A \cap B$; por consiguiente, al ser A y B sucesos independientes,

$$P(S_2) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P_A \cdot P_B.$$

12. En una fábrica de automóviles se ha detectado que la probabilidad de que una puerta sea defectuosa es igual a 0,007. ¿Cuál es la probabilidad de que un coche de cuatro puertas tenga exactamente dos puertas defectuosas?

Considerando como «éxito» el suceso resultar puerta defectuosa, de probabilidad $p = 0{,}007$, y como «fracaso» el suceso contrario resultar puerta correcta, de probabilidad $q = 1 - p = 0{,}993$; teniendo en cuenta que el funcionamiento de una puerta es independiente del de las otras, la probabilidad pedida es la de obtener dos éxitos en cuatro pruebas de una distribución binomial; es decir:

$$P_2 = \binom{4}{2} \cdot 0{,}007^2 \cdot 0{,}993^2 = 2{,}899 \cdot 10^{-4} = 0{,}0002899.$$

13. Se realiza el siguiente juego: se extrae una carta de la baraja española. Se produce el suceso A si la carta es un as, un rey o un caballo. Una vez vista la carta se introduce de nuevo en la baraja. Se realiza la experiencia diez veces. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya producido exactamente cinco veces el suceso A?

La probabilidad p del suceso A es $p = \dfrac{4+4+4}{40} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

Teniendo en cuenta que las extracciones son independientes, la probabilidad de obtener exactamente 5 veces el suceso A (éxito) en 10 pruebas viene dada por la distribución binomial

$$P_5 = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{10}\right) = 252 \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^5 = 0{,}1029.$$

14. Dos amigos, A y B, compiten en el siguiente juego: A tira dos dados y gana si la suma de puntos es 4; si no ha ganado, B tira los dados y gana si obtiene como suma de puntos 6; si B no ha ganado, A vuelve a tirar en las mismas condiciones; y así sucesivamente hasta que uno gane. Calcular la probabilidad que tiene A de ganar.

Sea A el suceso obtener suma cuatro al tirar dos dados y B el suceso obtener suma seis al tirar dos dados. De los $V'_{6,2} = 6^2 = 36$ casos posibles que se pueden obtener al tirar dos dados son favorables al suceso $A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, y al suceso $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$. Por tanto, se tiene

$$a = P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \qquad \bar{a} = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12};$$

$$b = P(B) = \frac{5}{36}, \qquad \bar{b} = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}.$$

Los casos en los que gana el jugador A son: A, $\bar{A}\bar{B}A$, $\bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{B}A$, ...; como son casos incompatibles, la probabilidad de que gane A es la suma de las probabilidades de todos ellos, y como cada caso es la composición de sucesos independientes se tiene que la probabilidad P_A de ganar A es

$$P_A = a + \bar{a}\bar{b}a + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}a + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}a + \ldots;$$

$$P_A = a(1 + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b} + \ldots) = a[1 + (\bar{a}\bar{b}) + (\bar{a}\bar{b})^2 + (\bar{a}\bar{b})^3 + \ldots].$$

Teniendo en cuenta que la expresión entre corchetes es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $\bar{a}\bar{b} < 1$, resulta que la probabilidad pedida es

$$P_A = a\left(\frac{1}{1 - \bar{a}\bar{b}}\right) = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{1 - \dfrac{11}{12} \cdot \dfrac{31}{36}}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{432}{91} = \frac{36}{91} = 0{,}3956.$$

15. Hallar la probabilidad que tiene B de ganar en el juego del ejercicio **14.**

Comprobar que $P(A) + P(B) = 1$.

Siguiendo el planteamiento y la notación del problema anterior, se tiene que los casos en los que gana B son: $\overline{A}B$, $\overline{A}\overline{B}\overline{A}B$, $\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B$, ... La probabilidad P_B de que gane B es

$$P_B = \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}\bar{a}b + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}b + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}b + \ldots;$$

$$P_B = \bar{a}b(1 + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b} + \ldots) = \bar{a}b[1 + (\bar{a}\bar{b}) + (\bar{a}\bar{b})^2 + (\bar{a}\bar{b})^3 + \ldots];$$

$$P_B = \bar{a}b\left(\frac{1}{1-\bar{a}\bar{b}}\right) = \frac{11}{12}\cdot\frac{5}{36}\cdot\left(\frac{1}{1-\dfrac{11}{12}\cdot\dfrac{31}{36}}\right) = \frac{11}{12}\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{432}{91} = \frac{55}{91} = 0{,}6044.$$

Se comprueba que $P_A + P_B = \dfrac{36}{91} + \dfrac{55}{91} = 1$.

16. Una urna contiene dos bolas, que pueden ser blancas o negras, o una blanca y una negra. Se añade una bola blanca a la urna y, después, se extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

(Propuesto en la Univ. Complutense de Madrid.)

Se consideran las siguientes hipótesis: B_1 la urna contiene dos bolas blancas, B_2 la urna contiene dos bolas negras, y B_3 la urna contiene una bola blanca y otra negra. Resulta que B_1, B_2 y B_3 forman un sistema completo de sucesos, ya que son mutuamente excluyentes y cubren todas las posibilidades. Se supone que cada una de estas hipótesis se da con igual probabilidad: $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \dfrac{1}{3}$.

Después de añadir una bola blanca a la urna, la probabilidad del suceso A extraer una bola blanca viene dada por la fórmula de la probabilidad total:

$$P = P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + P(B_3)\cdot P(A/B_3);$$

$$P = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

17. Se dispone de dos cañones cuyas probabilidades de hacer blanco son 0,1 y 0,3. Se hace un disparo con cada uno de ellos. Calcular las probabilidades de no hacer ningún blanco y de hacer un solo blanco.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

Sea A el suceso hacer blanco con el primer cañón y B el suceso hacer blanco con el segundo cañón. Según el enunciado, $P(A) = 0{,}1$ y $P(B) = 0{,}3$.

El suceso no hacer ningún blanco es $\overline{A} \cap \overline{B}$. Como los resultados de ambos disparos son independientes, se tiene:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = (1 - 0{,}1)\cdot(1 - 0{,}3) = 0{,}9\cdot 0{,}7 = 0{,}63$$

El suceso hacer un solo blanco es $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Como los sucesos $A \cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cap B$ son sucesos incompatibles, resulta:

$$P = P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)\cdot P(\overline{B}) + P(B)\cdot P(\overline{A});$$

$$P = 0{,}1\cdot(1 - 0{,}3) + 0{,}3\cdot(1 - 0{,}1) = 0{,}1\cdot 0{,}7 + 0{,}3\cdot 0{,}9 = 0{,}07 + 0{,}27 = 0{,}34.$$

18. En una urna hay cinco bolas negras, cuatro blancas, tres rojas, dos verdes y una azul. Se realizan diez extracciones sucesivas, devolviendo la bola extraída después de cada extracción. Hallar la probabilidad de obtener exactamente tres bolas negras, dos rojas, una verde y una azul en las diez extracciones.

Las probabilidades de extraer cada uno de los tipos de bola en una extracción son:

$$P(N) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \quad P(B) = \frac{4}{15}; \quad P(R) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}; \quad P(V) = \frac{2}{15}; \quad P(A) = \frac{1}{5}.$$

Como las extracciones son independientes, al ser con reemplazamiento, la probabilidad de extraer 3N, 2R, 1V, 1A y, por tanto, 3B en un orden determinado, es la probabilidad compuesta:

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{1}{15}\right) \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^3 = \frac{128}{512\,578\,125} = 2{,}49718 \cdot 10^{-7}$$

Ahora bien, el resultado anterior se da en $P_{10}^{3,\,2,\,1,\,1,\,3} = \dfrac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = 50\,400$ casos, según se consideran los distintos órdenes en que pueden producirse los resultados.

Por consiguiente, la probabilidad pedida es

$$P = P_{10}^{3,\,2,\,1,\,1,\,3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{15}\right) \cdot \left(\frac{1}{15}\right) \cdot \left(\frac{4}{15}\right)^3 = 50\,400 \cdot 2{,}49718 \cdot 10^{-7} = 0{,}01259.$$

19. En cierto país, donde la enfermedad x es endémica, se sabe que un 12 % de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90 % de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5 % de las personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

(Propuesto en la Univ. de Murcia.)

Sea B_1 el suceso estar sano y B_2 el suceso estar enfermo. Los sucesos B_1 y B_2 forman claramente un sistema completo de sucesos y sus probabilidades son $P(B_1) = 0{,}88$ y $P(B_2) = 0{,}12$.

Sea A el suceso que ocurre cuando la prueba es positiva. Por el enunciado se sabe que $P(A/B_1) = 0{,}05$ y $P(A/B_2) = 0{,}90$.

Se calcula la probabilidad pedida $P(B_1/A)$ aplicando el teorema de Bayes.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2)} = \frac{0{,}88 \cdot 0{,}05}{0{,}88 \cdot 0{,}05 + 0{,}12 \cdot 0{,}90} = 0{,}2895.$$

20. Un cajón contiene cuatro calcetines negros, seis marrones y dos azules. Se toman dos calcetines al azar. Se pregunta:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos calcetines tengan el mismo color?

b) Si los calcetines elegidos son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que sean negros?

(Propuesto en la Univ. de Oviedo.)

a) Se pueden extraer dos calcetines de un cajón con doce de $C_{12,\,2} = \binom{12}{2} = 66$ formas diferentes. Son casos favorables al suceso planteado los $C_{4,\,2} = \binom{4}{2} = 6$ casos en que se extraen dos calcetines negros, los $C_{6,\,2} = \binom{6}{2} = 15$ casos en que se extraen dos marrones y el $C_{2,\,2} = \binom{2}{2} =$ $= 1$ caso en que se extraen dos azules.

Por consiguiente, la probabilidad pedida es $P(A) = \dfrac{6 + 15 + 1}{66} = \dfrac{22}{66} = \dfrac{1}{3}$.

b) La probabilidad del suceso N extraer dos calcetines negros condicionada al suceso A los dos calcetines son del mismo color es

$$P(N/A) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{P(N)}{P(A)} = \frac{\binom{4}{2}/66}{22/66} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}.$$

21. Una urna contiene una bola blanca, dos negras y tres rojas. Se extrae al azar una bola, que después de ser observada se devuelve a la urna. Se repite la experiencia diez veces. Hallar la probabilidad de haber extraído menos de tres bolas negras.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

Teniendo en cuenta que cada extracción son pruebas idénticas e independientes, si se considera «éxito» el suceso extraer bola negra, con probabilidad $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, y «fracaso» el suceso contrario no extraer bola negra con probabilidad $q = 1 - p = \dfrac{2}{3}$, la probabilidad pedida es la de obtener 0, 1 o 2 éxitos en una distribución binomial de 10 pruebas; es decir:

$$P = P_0 + P_1 + P_2;$$

$$P = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8;$$

$$P = \frac{1\,024}{3^{10}} + \frac{5\,120}{3^{10}} + \frac{11\,520}{3^{10}} = \frac{17\,664}{59\,049} = 0{,}2991.$$

22. Se lanza un dado tres veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que se pueda construir un triángulo cuyos lados tengan longitudes dadas por los resultados de las tiradas.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Supóngase que se ha lanzado el dado dos veces y considérense los $V'_{6,2} = 6^2 = 36$ posibles resultados (a, b). Se estudiará en cada uno de estos casos los valores que puede tomar el tercer lanzamiento c de manera que los tres (a, b, c) representen las longitudes de los lados de un triángulo. Para ello se aplicará el hecho de que la condición necesaria y suficiente para que un segmento forme un triángulo con otros dos es que su longitud sea menor que la suma y mayor que la diferencia de sus longitudes. Es decir, c tiene que ser tal que $|a - b| < c < |a + b|$.

Por ejemplo, los valores que puede tomar el tercer lanzamiento c cuando se ha obtenido (3, 5) en los dos primeros de manera que los tres se correspondan con las longitudes de los lados de un triángulo son aquellos valores de c tales que $2 = |5 - 3| < c < |5 + 3| = 8 \rightarrow c = 3, 4, 5, 6$ (4 casos), nótese que c es el resultado del lanzamiento de un dado, y debe verificarse que $c \leqslant 6$.

En definitiva, resulta que (a, b, c) forman triángulo en los siguientes números de casos:

$(1, 1) \rightarrow 1;$	$(1, 2) \rightarrow 1;$	$(1, 3) \rightarrow 1;$	$(1, 4) \rightarrow 1;$	$(1, 5) \rightarrow 1;$	$(1, 6) \rightarrow 1;$
$(2, 1) \rightarrow 1;$	$(2, 2) \rightarrow 3;$	$(2, 3) \rightarrow 3;$	$(2, 4) \rightarrow 3;$	$(2, 5) \rightarrow 3;$	$(2, 6) \rightarrow 2;$
$(3, 1) \rightarrow 1;$	$(3, 2) \rightarrow 3;$	$(3, 3) \rightarrow 5;$	$(3, 4) \rightarrow 3;$	$(3, 5) \rightarrow 4;$	$(3, 6) \rightarrow 3;$
$(4, 1) \rightarrow 1;$	$(4, 2) \rightarrow 3;$	$(4, 3) \rightarrow 5;$	$(4, 4) \rightarrow 6;$	$(4, 5) \rightarrow 5;$	$(4, 6) \rightarrow 4;$
$(5, 1) \rightarrow 1;$	$(5, 2) \rightarrow 3;$	$(5, 3) \rightarrow 4;$	$(5, 4) \rightarrow 5;$	$(5, 5) \rightarrow 6;$	$(5, 6) \rightarrow 5;$
$(6, 1) \rightarrow 1;$	$(6, 2) \rightarrow 2;$	$(6, 3) \rightarrow 3;$	$(6, 4) \rightarrow 4;$	$(6, 5) \rightarrow 5;$	$(6, 6) \rightarrow 6;$

Lo que supone un total de 111 casos favorables a formar triángulo.

Por consiguiente, la probabilidad pedida es $P = \dfrac{111}{216} = \dfrac{37}{72} = 0{,}5139$.

23. Una urna contiene cinco bolas blancas y siete negras. Se sacan al azar tres bolas. Hallar la probabilidad de que al menos una bola sea blanca.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

Sea A el suceso planteado y $\overline{A}$ su contrario obtener las tres bolas negras; entonces se tiene:

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44} \rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44} = 0{,}8409.$$

24. Se tienen once urnas numeradas del 2 al 12. La composición de las urnas es la siguiente:

Número de la urna	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
número de bolas blancas	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
número de bolas negras	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Se tiran dos dados sucesivamente. Si la suma de los puntos obtenidos es k, se hace la extracción de la urna cuyo número es k. Si sale bola negra, se termina el juego. Si sale bola blanca, se vuelven a tirar los dados y se repite el proceso. Se pide la probabilidad de hacer, como mínimo, tres extracciones.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

El hecho de hacer un mínimo de tres extracciones equivale al de obtener bola blanca en las dos primeras extracciones. Si se supone que las extracciones de la urna son con reemplazamiento, entonces las jugadas son independientes, y si B_1 representa el suceso de extraer bola blanca en la primera extracción y B_2 representa el suceso de extraer bola blanca en la segunda extracción, la probabilidad buscada es $P = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2)$, y además $P(B_1) = P(B_2)$, con lo cual la probabilidad pedida es $P = P(B_1)^2$.

Ahora bien, como la extracción de las urnas está condicionada por los posibles resultados obtenidos al lanzar los dados, y éstos forman un sistema completo de sucesos, se tiene, aplicando la fórmula de la probabilidad total, que la probabilidad de sacar una bola blanca es

$$P(B_1) = P(2) \cdot P(B_1/2) + P(3) \cdot P(B_1/3) + \ldots + P(12) \cdot P(B_1/12).$$

Sustituyendo en la expresión anterior las probabilidades P(i) de obtener suma i al lanzar dos dados (véase el problema **12** del tema anterior), resulta:

$$P(B_1) = \frac{1}{36} \cdot 0 + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} +$$

$$+ \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{36} \cdot 0 = \frac{25}{36}.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es $P = P(B_1) \cdot P(B_1) = \dfrac{25}{36} \cdot \dfrac{25}{36} = \dfrac{625}{1\,296} = 0{,}4822$.

25. En una Universidad en la que sólo hay estudiantes de Arquitectura, Ciencias y Letras, terminan la carrera el 5 % en Arquitectura, el 10 % en Ciencias y el 20 % en Letras. Se sabe que el 20 % del total estudian Arquitectura, el 30 % Ciencias y el 50 % Letras. Elegido un alumno al azar, determinar:

a) La probabilidad de que sea de Arquitectura y haya terminado la carrera.

b) La probabilidad de que sea de Arquitectura si se sabe que ha terminado la carrera.

(Propuesto en la Univ. de Oviedo.)

Si se representa por S acabar la carrera, N no acabar la carrera, y por A estudiar Arquitectura, C estudiar Ciencias y L estudiar Letras, del enunciado del problema se sabe que

$P(A) = 0{,}20;\quad P(C) = 0{,}30;\quad P(L) = 0{,}50;\quad P(S/A) = 0{,}05;\quad P(S/C) = 0{,}10;\quad P(S/L) = 0{,}20.$

a) La probabilidad del suceso pedido es $P(A \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) = 0{,}20 \cdot 0{,}05 = 0{,}01$.

b) Teniendo en cuenta que $\{A, C, L\}$ forman un sistema completo de sucesos, la probabilidad pedida resulta aplicando el teorema de Bayes:

$$P(A/S) = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(A) \cdot P(S/A) + P(C) \cdot P(S/C) + P(L) \cdot P(S/L)};$$

$$P(A/S) = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}05}{0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}30 \cdot 0{,}10 + 0{,}50 \cdot 0{,}20} = \frac{0{,}01}{0{,}14} = \frac{1}{14} = 0{,}07143.$$

26. Una urna contiene cuatro bolas rojas, dos negras y tres amarillas. Se pide:

a) La probabilidad de que al extraer dos bolas al azar ambas sean rojas.

b) La probabilidad de que al extraer tres bolas al azar al menos dos sean rojas.

(Propuesto en la Univ. de La Laguna.)

a) El número de formas posibles de extraer dos bolas de una urna de nueve es $C_{9,2} = \binom{9}{2} = 36$. Los casos favorables al suceso planteado son las formas de extraer dos bolas de entre las cuatro rojas; es decir, $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$. Por consiguiente, la probabilidad pedida es $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) El suceso extraer al menos dos bolas rojas es unión disjunta de los sucesos R_2 extraer exactamente dos bolas rojas y R_3 extraer tres bolas rojas. De los $C_{9,3} = \binom{9}{3} = 84$ casos posibles, son favorables al suceso $R_2 \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} = 6 \cdot 5 = 30$, y favorables al suceso $R_3 \binom{4}{3} = 4$. Por tanto, la probabilidad pedida es $P = \frac{30 + 4}{84} = \frac{34}{84} = \frac{17}{42} = 0{,}4048$.

27. Se tienen dos urnas. La primera contiene seis bolas blancas y ocho negras; la segunda, cuatro bolas blancas y doce negras. Se extrae una bola de cada urna. Hallar la probabilidad de que sean del mismo color.

(Propuesto en la Univ. de Baleares.)

Sea B_i el suceso extraer bola blanca de la urna i y N_i el suceso extraer bola negra de la urna i, para $i = 1$ y 2. La probabilidad pedida es la del suceso $(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)$. Como la unión es disjunta y las extracciones son independientes,

$$P = P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) + P(N_1) \cdot P(N_2);$$

$$P = \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{16} + \frac{8}{14} \cdot \frac{12}{16} = \frac{3}{28} + \frac{12}{28} = \frac{15}{28} = 0{,}5357.$$

28. Dos equipos de natación han competido en cinco ocasiones, ganando el primero en cuatro de ellas. Si este primer equipo consta de tres nadadores y el número de victorias del primer nadador es el doble del segundo y el triple del tercero, ¿cuál es la probabilidad de que gane el primero de los tres nadadores en la próxima confrontación de equipos?

(Propuesto en la Univ. de Alicante.)

Sea A el suceso gana el primer equipo y B el suceso gana el segundo equipo; según los datos del enunciado, se estima que $P(A) = \frac{4}{5}$ y $P(B) = \frac{1}{5}$.

Sean los sucesos X gana el primer nadador del equipo A, Y gana el segundo nadador y Z gana el tercero. Si $x = P(X/A)$, $y = P(Y/A)$ y $z = P(Z/A)$, se tiene que $x = 2y$ y $x = 3z$; además, como $A = X \cup Y \cup Z$, $x + y + z = 1$.

Resolviendo el sistema formado por estas tres ecuaciones, se obtiene:

$$x = \frac{6}{11}, \; y = \frac{3}{11} \; y \; z = \frac{2}{11}.$$

La probabilidad pedida es $P = P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) = P(X \cap A) + 0 = P(X \cap A)$, y según la expresión de la probabilidad condicionada se tiene:

$$P = P(X \cap A) = P(A) \cdot P(X/A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{24}{55} = 0{,}4364.$$

29. En una fábrica se observa que una máquina produce piezas defectuosas. Se sabe que a lo largo del tiempo el 20 % de las piezas son defectuosas. De la producción de un día se eligen al azar ocho piezas fabricadas por dicha máquina. Hallar:

a) La probabilidad de que exactamente dos sean defectuosas.

b) La probabilidad de que al menos haya una defectuosa.

(Propuesto en la Univ. de Granada.)

Se considera como «éxito» elegir una pieza defectuosa, de probabilidad $p = 0{,}20$, y como «fracaso» elegir una pieza correcta, de probabilidad $q = 1 - p = 0{,}80$. Si se supone que la elección de cada una de las piezas son sucesos independientes (cosa que ocurre cuando la elección es con reemplazamiento o bien cuando el número de piezas producidas es muy grande en comparación el tamaño de la muestra tomada), se trata de una distribución binomial de ocho pruebas.

a) La probabilidad pedida es $P = P_2 = \binom{8}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6 = 0{,}2936.$

b) La probabilidad pedida es la complementaria del suceso ninguna pieza defectuosa; es decir:

$$P = 1 - P_0 = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^8\right] = 1 - 0{,}1678 = 0{,}8322.$$

30. Se tienen dos urnas, A y B. En A hay seis bolas blancas y cuatro negras y en B, cinco blancas y ocho negras. Se toma una urna al azar y de ella se extraen dos bolas. Hallar:

a) La probabilidad de que sean las dos negras.

b) La probabilidad de que sean una de cada color.

(Propuesto en la Univ. de Zaragoza.)

a) Sea S el suceso extraer las dos bolas negras; observando la composición de cada una de las urnas, se tiene que

$$P(S/A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{15}; \qquad P(S/B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{14}{39}.$$

Así pues, aplicando la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad pedida es

$$P(S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{39} = \frac{16}{65} = 0{,}2461.$$

b) Sea T el suceso extraer una bola de cada color; observando la composición de las urnas A y B, se tiene que

$$P(T/A) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}; \qquad P(T/B) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{13}{2}} = \frac{20}{39}.$$

Así pues, la probabilidad pedida es

$$P = P(T) = P(A) \cdot P(T/A) + P(B) \cdot P(T/B);$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{39} = \frac{4}{15} + \frac{10}{39} = \frac{34}{65} = 0{,}5231.$$

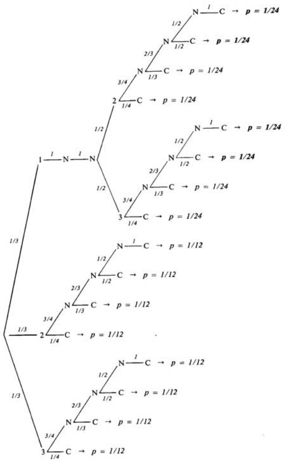
31. Un señor tiene tres llaveros en el bolsillo. En el primero lleva dos llaves, en el segundo, cuatro (una de las cuales es de su casa) y en el tercero, cuatro (una de las cuales también es de su casa). El señor llega ebrio a su casa y toma al azar un llavero del bolsillo. Del llavero elegido toma, al azar, una llave y trata de abrir la puerta de su casa. Si no puede, prueba sucesivamente las restantes llaves del llavero. Cuando finaliza con el llavero, si no ha podido abrir, lo tira al suelo y busca otro en el bolsillo, con el cual repite la operación. Hallar la probabilidad de que pueda abrir probando cuatro llaves como máximo.

(Propuesto en la Univ. de Barcelona.)

En este tipo de problemas en los que existe una gran complejidad de posibilidades suele ser muy conveniente construir un diagrama de árbol con todas ellas.

Se representa por 1, 2 y 3 cada una de las posibilidades de elegir cada uno de los tres llaveros; y se representa por C la elección de la llave de la casa y por N la elección de una llave que no es de la casa.

En el diagrama que se va a construir a continuación cada una de las opciones da origen a otras varias, y en la rama correspondiente se anota la probabilidad con la que ocurre. La probabilidad de que se haya dado una sucesión de opciones será la de la probabilidad compuesta que se obtiene multiplicando las probabilidades de las ramas correspondientes.



N — C → p = 1/24
N — C → p = 1/24
N — C → p = 1/24
2 — C → p = 1/24
N — C → p = 1/24
N — C → p = 1/24
N — C → p = 1/24
3 — C → p = 1/24
1 — N — N
N — C → p = 1/12
N — C → p = 1/12
N — C → p = 1/12
2 — C → p = 1/12
N — C → p = 1/12
N — C → p = 1/12
N — C → p = 1/12
3 — C → p = 1/12
1/3
1/2
3/4
2/3
1/4
1

Las probabilidades de los casos en los que se necesitan más de cuatro pruebas para abrir la puerta de la casa están señalados en negrita, lo que supone una probabilidad en total de

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

La probabilidad pedida es la complementaria de ésta; es decir, $P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

32. Se tienen tres urnas. La primera contiene tres bolas blancas y dos rojas; la segunda, dos blancas y dos rojas; la tercera, tres blancas y tres rojas. Se saca al azar una bola de la primera urna y se introduce en la segunda; seguidamente se saca una bola de la segunda y se introduce en la tercera; finalmente, se saca una bola de la tercera y se introduce en la primera. Hallar la probabilidad de que las tres urnas se queden con la misma composición inicial.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Para que las tres urnas queden al final con la composición original tiene que darse que la bola extraída de cada una de las urnas sea del mismo color que la bola que se introduce en ella. Así pues, sólo pueden darse dos casos, que de la primera urna se extraiga bola blanca, de la segunda se extraiga bola blanca y también de la tercera; y que de la primera urna se extraiga bola roja, y lo mismo ocurra en la segunda y tercera. Las probabilidades de cada uno de estos sucesos son:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{36}{175};$$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) \cdot P(R_3/R_1 \cap R_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{175}.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es la suma de las dos anteriores; es decir,

$$P = \frac{36}{175} + \frac{24}{175} = \frac{12}{35} = 0{,}3429.$$

33. Se considera una urna con cinco bolas blancas y tres rojas. Se saca una bola de la urna; si es roja, se devuelve a la urna y, si es blanca, se reemplaza por tres bolas rojas, volviéndose a extraer una nueva bola en cualquiera de los dos casos. Hallar:

a) La probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas.

b) La probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas.

c) La probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color.

d) La probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca, sabiendo que la segunda ha sido roja.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Sea B_i el suceso extraer bola blanca en la i-ésima extracción y R_i extraer bola roja en la i-ésima extracción, para $i = 1$ y 2. Teniendo en cuenta la composición de las urnas, se tiene:

$$P(B_1) = \frac{5}{8}; \qquad P(B_2/B_1) = \frac{2}{5}; \qquad P(R_2/B_1) = \frac{3}{5};$$

$$P(R_1) = \frac{3}{8}; \qquad P(B_2/R_1) = \frac{5}{8}; \qquad P(R_2/R_1) = \frac{3}{8}.$$

Así pues, resulta:

a) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{4}.$

b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}.$

c) $P(B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) =$

$= P(B_1) P(R_2/B_1) + P(R_1) P(B_2/R_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{39}{64}.$

d) Aplicando el teorema de Bayes,

$$P(B_1/R_2) = \frac{P(B_1) \cdot P(R_2/B_1)}{P(B_1) \cdot P(R_2/B_1) + P(R_1) \cdot P(R_2/R_1)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{8}{11} = 0{,}7272.$$

34. Una fábrica tiene un total de doce máquinas. Se sabe, de experiencias anteriores, que cada máquina está averiada un día de cada diez. Hallar la probabilidad de que en un cierto día más de tres máquinas estén averiadas.

(Propuesto en la Univ. Politécnica de Madrid.)

Como el funcionamiento de cada máquina es independiente del de las otras, se aplica la distribución binomial de 12 pruebas en la que el «éxito» es estar averiada, con probabilidad $p = \frac{1}{12}$, y el «fracaso» estar funcionando, con probabilidad $q = 1 - p = \frac{11}{12}$. Así pues, la probabilidad pedida es

$$P = P_4 + P_5 + \dots + P_{12} = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3);$$

$$P = 1 - \left[\binom{12}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^{12} + \binom{12}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^1\left(\frac{11}{12}\right)^{11} + \right.$$

$$\left. + \binom{12}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^{10} + \binom{12}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^3\left(\frac{11}{12}\right)^{9}\right];$$

$$P = 1 - 0{,}98617 = 0{,}01383.$$

35. Aplicar el teorema de Bayes para el caso en que la probabilidad del suceso A sea la misma, cualquiera que sea la hipótesis $H_1, H_2, \dots, H_n$ que se verifique y la probabilidad de H_i sea la mitad de la de H_{i-1}, para $i = 1, 2, \dots, n$.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Aplicando el teorema de Bayes, se tiene:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) P(A/H_n)}.$$

Según se dice en el enunciado $P(A/H_i) = P(A/H_k)$, para cualquier valor de i y de k; dividiendo en la expresión anterior numerador y denominador por dicho valor, resulta:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)}{P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n)} = \frac{P(H_i)}{1} = P(H_i).$$

Se calcula el valor de $P(H_i)$. Teniendo en cuenta que

$$P(H_2) = \frac{1}{2} P(H_1),\ P(H_3) = \frac{1}{2} P(H_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot P(H_1), \ldots, P(H_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot P(H_1);$$

se tiene, recordando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica, que

$$1 = P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = P(H_1)\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = P(H_1)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}.$$

Y, por consiguiente,

$$P(H_1) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}; \qquad P(H_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} P(H_1) = \frac{2^{n-i}}{2^n - 1}.$$

En definitiva, se tiene que $P(H_i/A) = P(H_i) = \dfrac{2^{n-i}}{2^n - 1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

36. Decir en qué casos serían iguales las probabilidades a priori y a posteriori de una hipótesis.
(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Sea $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ un sistema completo de sucesos; sus probabilidades $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ son las probabilidades a priori. Sea A un suceso condicionado por las hipótesis $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$; las probabilidades $P(H_1/A), P(H_2/A), \ldots, P(H_n/A)$ son las probabilidades a posteriori.

Según la definición de probabilidad condicionada:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Si se supone que las probabilidades a priori y a posteriori de las hipótesis son iguales, de la expresión anterior se deduce:

$$P(H_i/A) = P(H_i) \rightarrow P(A/H_i) = P(A) \rightarrow P(A \cap H_i) = P(A) \cdot P(H_i).$$

Es decir, el suceso A es independiente de las hipótesis.

37. Tres cajas idénticas contienen cada una dos fichas. En una las dos fichas son de color blanco, en otra son de color rojo y en la tercera una es roja y la otra blanca. Escogida al azar una caja, se extrae una ficha que resulta ser de color blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra ficha sea también blanca?
(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

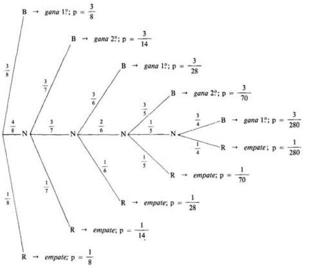
Teniendo en cuenta que en el único caso en que habiendo extraído una ficha blanca queda otra ficha blanca en la urna es cuando la extracción se realiza en la urna número 1, si se representa por A_i elegir la urna i ($P(A_i) = \frac{1}{3}$, para $i = 1, 2, 3$), y por B extraer bola blanca, la probabilidad pedida es, aplicando el teorema de Bayes:

$$P = P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3)};$$

$$P = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

38. *De una urna que contiene tres bolas blancas, cuatro negras y una roja, dos jugadores extraen sucesivamente una bola sin volver a introducirla. Gana el primero que extrae bola blanca y convienen en que si sale bola roja el juego termina en empate. Calcular la probabilidad de que gane el primer jugador (el que empieza el juego) y de que el juego termine en empate.*

Se considera el siguiente esquema de árbol en el que se muestran todas las posibilidades del juego, con las probabilidades de cada una de ellas (véase el problema **31** de este mismo tema). Como las extracciones se producen sin reemplazamiento, en cada extracción se tiene en cuenta la composición de la urna en función de las extracciones anteriores.



A la vista del esquema anterior resulta que las probabilidades del juego son:

$$P(\text{gane } 1.^{\text{o}}) = \frac{3}{8} + \frac{3}{28} + \frac{3}{280} = \frac{69}{140} = 0{,}4929; \quad P(\text{gane } 2.^{\text{o}}) = \frac{3}{14} + \frac{3}{70} = \frac{9}{35} = 0{,}2571;$$

$$P(\text{empate}) = \frac{1}{280} + \frac{1}{70} + \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

39. Una comisión internacional está formada por dos españoles, tres españolas, cuatro alemanes, dos alemanas, tres ingleses y cinco inglesas. Se elige por votación un presidente que resulta ser varón. Hallar la probabilidad de que sea español.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Los datos aportados por el enunciado se resumen en el siguiente cuadro:

Nacionalidad	*Sexo*		*Total*
	Varón (V)	Hembra (H)	
Española (E)	2	3	5
Alemana (A)	4	2	6
Inglesa (I)	3	5	8
Total	9	10	19

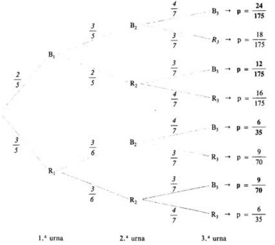
La probabilidad pedida es $P(E/V) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)} = \dfrac{2/19}{9/19} = \dfrac{2}{9} = 0{,}2222.$

40. Se tienen tres urnas; en la primera hay dos bolas blancas y tres rojas; en la segunda, tres blancas y dos rojas; en la tercera, tres blancas y tres rojas. Se saca al azar una bola de la primera urna y se introduce en la segunda si es roja. A continuación se saca al azar una bola de la segunda urna y se introduce en la tercera, de la que nuevamente se saca al azar una bola. Hallar la probabilidad de que ésta sea blanca.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Sean los sucesos B_i extraer bola blanca de la urna i e R_i extraer bola roja de la urna i, para i = 1, 2 y 3.

Se construye el siguiente diagrama de árbol en el que se muestran todas las posibilidades del experimento y las probabilidades de cada una de ellas.



La probabilidad pedida es $P = P(B_3) = \frac{24}{175} + \frac{12}{175} + \frac{6}{35} + \frac{9}{70} = \frac{177}{350} = 0,5057.$

Nota: Aplicando reiteradamente la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad pedida se expresa:

$$P = P(B_3) = P(B_3/B_2) \cdot P(B_2) + P(B_3/R_2) \cdot P(R_2);$$

$$P = P(B_3/B_2) \cdot [P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(B_2/R_1) \cdot P(R_1)] +$$

$$+ P(B_3/R_2) \cdot [P(R_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(R_2/R_1) \cdot P(R_1)];$$

$$P = P(B_3/B_2) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(B_3/B_2) \cdot P(B_2/R_1) \cdot P(R_1) +$$

$$+ P(B_3/R_2) \cdot P(R_2/B_1) \cdot P(B_1) + P(B_3/R_2) \cdot P(R_2/R_1) \cdot P(R_1).$$

41. Una urna contiene veinte bolas blancas y treinta rojas. Se saca una bola, que se guarda sin ver su color, y se extrae una nueva bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

Sean los sucesos R_i extraer bola roja en la i-ésima extracción y B_i extraer bola blanca en la i-ésima extracción, para $i = 1$ y 2.

Aplicando la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad pedida es

$$P(R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(B_1) \cdot P(R_2/B_1) = \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} + \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{49} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

42. En el ejercicio anterior, en vez de extraer una bola previamente, se extraen tres bolas de las cuales se desconoce el color. Se extrae una nueva bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

Los posibles resultados de la primera extracción son $A_1 = RRR$, $A_2 = RRB$, $A_3 = RBB$ y $A_4 = BBB$, y sus probabilidades

$$P(A_1) = \frac{\binom{30}{3}}{\binom{50}{3}} = \frac{4\,060}{19\,600} = \frac{29}{140}; \qquad P(A_2) = \frac{\binom{30}{2} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{50}{3}} = \frac{435 \cdot 20}{19\,600} = \frac{87}{196};$$

$$P(A_3) = \frac{\binom{30}{1} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{50}{3}} = \frac{30 \cdot 190}{19\,600} = \frac{57}{196}; \quad P(A_4) = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{50}{3}} = \frac{1\,140}{19\,600} = \frac{57}{980}.$$

Como $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ forman un sistema completo de sucesos, aplicando la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad pedida es

$$P = P(R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) + P(A_2) \cdot P(R_2/A_2) + P(A_3) \cdot P(R_2/A_3) + P(A_4) \cdot P(R_2/A_4);$$

$$P = \frac{29}{140} \cdot \frac{27}{47} + \frac{87}{196} \cdot \frac{28}{47} + \frac{57}{196} \cdot \frac{29}{47} + \frac{57}{980} \cdot \frac{30}{47} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

43. Una urna A contiene seis bolas blancas y tres negras. Otra urna B contiene siete bolas blancas y dos negras. Elegimos una urna al azar y extraemos de ella dos bolas que resultan ser blancas. Hallar la probabilidad de que la urna haya sido la A.

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

El suceso S extraer dos bolas blancas, según se realice la extracción en la urna A o B, tiene por probabilidad

$$P(S/A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}; \qquad P(S/B) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}.$$

Suponiendo que la probabilidad de elección de ambas urnas es idéntica, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, aplicando el teorema de Bayes, resulta que la probabilidad pedida es

$$P(A/S) = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}} = \frac{5}{12}.$$

44. La probabilidad de que un artículo provenga de la fábrica I es 0,6 y la probabilidad de que provenga de la fábrica II es 0,4. La primera produce artículos defectuosos con probabilidad 0,01 y la segunda con probabilidad 0,05. Se observa un artículo y resulta ser defectuoso. Hallar la probabilidad de que provenga de la fábrica I.

(Propuesto en la Univ. Autónoma de Madrid.)

Si D representa el suceso tomar una pieza defectuosa, aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad pedida es

$$P(I/D) = \frac{P(I) \cdot P(D/I)}{P(I) \cdot P(D/I) + P(II) \cdot P(D/II)} = \frac{0,6 \cdot 0,01}{0,6 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,05} = 0,23077.$$

45. Una sociedad fundada por cinco hombres y cinco mujeres como socios fundadores se amplía eligiendo dos mujeres y tres hombres más. De la sociedad así ampliada se elige al azar un presidente y se sabe que dicha persona es un socio fundador. ¿Cuál es la probabilidad de que el presidente sea un hombre?

(Propuesto en la Univ. de Valladolid.)

Sea H el suceso ser hombre y sea F el suceso ser socio fundador. La probabilidad pedida es

$$P(H/F) = \frac{P(H \cap F)}{P(F)} = \frac{5/15}{10/15} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

46. En una clase hay quince alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos dos alumnos que celebren su cumpleaños el mismo día?

Se estudia la probabilidad del suceso contrario $\overline{A}$ todos los alumnos celebran sus cumpleaños en fechas diferentes.

Las maneras en que se pueden elegir 15 fechas del año siendo todas diferentes es $V_{365,15} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 351$; como el total de modos en que se pueden elegir 15 fechas es $V'_{365,15} = 365^{15}$, resulta que la probabilidad del suceso $\overline{A}$ es

$$P(\overline{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 351}{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{14}{365}\right) = 0,7471.$$

Así pues, la probabilidad pedida es $P = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,7471 = 0,2529.$

34183
9 788426 319197